Esame di Ricerca Operativa - 5 luglio 2012
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (8 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuo se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(2pt) Quale é il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A–1 a G–9?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	250	149	80	36	14	14	14	4	•
B	101	69	44	22	•	•	10	4	1
C	32	25	22	22	16	11	6	3	1
D	7	3	•	6	5	5	3	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella

A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bullet$
B	1	2	3	4	$\bullet$	$\bullet$	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	$\bullet$	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	$\bullet$	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	$\bullet$	$\bullet$	194
G	1	7	18	44	$\bullet$	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0_1	1_1	4_1	4_1	5_1	6_1	6_1	6_1	$\bullet$
B	2_1	4_1	4_2	4_3	$\bullet$	$\bullet$	6_1	6_2	6_2
C	4_1	6_2	6_2	7_2	7_2	7_2	8_2	9_2	10_2
D	4_1	6_2	$\bullet$	7_2	7_4	7_6	9_2	9_4	10_2
E	4_1	6_2	7_2	8_4	$\bullet$	7_6	9_2	9_6	10_2
F	4_1	7_2	8_4	9_8	9_8	10_8	$\bullet$	$\bullet$	11_2
G	7_1	10_2	10_2	11_2	$\bullet$	10_8	10_8	11_8	11_{10}

Leggendo i valori riportati nella cella G–9 scopriamo che il massimo valore raccoglibile dal robot lungo la sua traversata é di 11, e che esistono 10 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 $\to$ G–9	250
B–3 $\to$ G–9	44
A–1 $\to$ F–6	56
passaggio per D–5	100
massimo valore	11
numero di max-val paths	10

Problema 2 (4 punti):

Gestiamo dei traghetti che raggiungono i porti sardi di Cagliari, Olbia, Sassari a partire dai porti di Civitavecchia, Genova, Piombino. Il guadagno netto in cui si incorre per un viaggio di andata e ritorno su ogni singolo tragitto è riportato nella seguente tabella:

	Civitavecchia	Genova	Piombino
Cagliari	2	6	4
Olbia	5	8	7
Sassari	3	6	5

Per la prossima estate i tre porti sardi possono ricevere al massimo 350, 270 e 160 navi, rispettivamente, e dai porti continentali possono partire al massimo 220, 470 e 180 navi, rispettivamente. Formulare come un problema di programmazione lineare il nostro desiderio di massimizzare i profitti.

svolgimento.

Per $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$, indichiamo con $x_{i,j}$ il numero di traghetti che vanno dal porto continentale i (1=Civitavecchia, 2=Genova, 3=Piombino) al porto sardo j (1=Cagliari, 2=Olbia, 3=Sassari). Quindi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ e $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Il nostro desiderio di massimizzare i profitti trova espressione nella funzione obbiettivo:

$$\min 2\,x_{1,1} + 6\,x_{1,2} + 4\,x_{1,3} + 5\,x_{2,1} + 8\,x_{2,2} + 7\,x_{2,3} + 3\,x_{3,1} + 6\,x_{3,2} + 5\,x_{3,3}\,.$$

Ma dobbiamo tenere conto dei vincoli sulla capienza in uscita dai porti continentali.

vincoli capienza in uscita dai porti continentali:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 220\,, x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 470\,, x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \leq 180\,,$$

e dei vincoli sulla capienza in entrata nei porti sardi.

vincoli capienza in entrata nei porti sardi:

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} \leq 350\,, x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} \leq 270\,, x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} \leq 160\,.$$

É bene inoltre non dimenticare di esprimere i vincoli di non-negativitá.

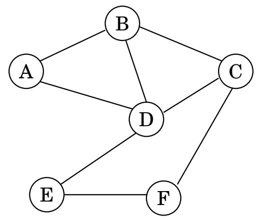
$$x_{i,j} \geq 0 \text{ per ogni } i, j = 1, 2, 3.$$

A rigore tali variabili $x_{i,j}$, in virtù del loro significato, sarebbero tenute ad essere intere. A quel punto la formulazione, più precisa, sarebbe però di Programmazione Lineare Intera (PLI) invece che non di Programmazione Lineare (PL) come richiesto dall'esercizio. In situazioni come queste si opta per la formulazione di PL dove, a fronte di un'imprecisione davvero minima, il problema puó essere risolto in tempo polinomiale e la sua buona caratterizzazione matematica ci consente di raccogliere diverse informazioni molto importanti (dualità e sensitività).

Problema 3/ (2+2 punti):

Un Matching in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M. Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

(2pt) Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

(2pt) Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = AB, AD, BC, BD, CD, CF, DE, EF$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Volendo minimizzare il costo del matching massimale, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min 12\, x_{AB} + 13\, x_{AD} + 15\, x_{BC} + 14\, x_{BD} + 11\, x_{CD} + 16\, x_{CF} + 17\, x_{DE} + 18\, x_{EF}$$

Abbiamo due insiemi di vincoli.

matching. Dobbiamo imporre che la soluzione sia un matching. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono ai nodi.

nodo A: $x_{AB} + x_{AD} \leq 1$;

nodo B: $x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} \leq 1$;

nodo C: $x_{BC} + x_{CD} + x_{CF} \leq 1$;

nodo D: $x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \leq 1$;

nodo E: $x_{DE} + x_{EF} \leq 1$;

nodo F: $x_{EF} + x_{CF} \leq 1$.

massimalità. Dobbiamo imporre che il matching sia massimale. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono agli archi.

arco AB: $x_{AB} + x_{AD} + x_{BC} + x_{BD} \geq 1$;

arco AD: $x_{AD} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

arco BD**:** $x_{BD} + x_{AB} + x_{BC} + x_{AD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

arco BC**:** $x_{BC} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{CF} \geq 1$;

arco CD**:** $x_{CD} + x_{BC} + x_{CF} + x_{AD} + x_{BD} + x_{DE} \geq 1$;

arco CF**:** $x_{CF} + x_{BC} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

arco DE**:** $x_{DE} + x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

arco EF**:** $x_{EF} + x_{DE} + x_{CF} \geq 1$.

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_{uv} \in \{0, 1\}$ per ogni arco $uv \in E$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema del MAXIMAL-MATCHING di costo minimo.

$$\begin{aligned} \min \sum_{uv \in E} C_{uv} x_{uv} \,, \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \text{ per ogni nodo } v \in V, \\ x_{uv} + \sum_{e \in \delta(u) \setminus \{uv\}} + \sum_{e \in \delta(v) \setminus \{uv\}} \geq 1 \text{ per ogni arco } uv \in E, \\ x_{uv} \in \{0, 1\} \text{ per ogni arco } uv \in E. \end{aligned}$$

Problema 4 (4 punti):

Sia $B = 30$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	47	27	28	48	9	5	17	24	52	17	4	22	22	15	5	13	23	13	20
valore	71	20	15	32	11	4	16	22	30	16	5	21	21	12	6	12	20	14	10

4.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

4.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

4.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

4.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 30, ottenendo:

nome	M	F	Q	E	R	T	P	G	L	U	N	O	S	H	B	C
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	16	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che $17 + 17 = 34 > 30$. E quindi posso sempre preferire di prendere L piuttosto che non G, o U, o C. Analogamente, ad S e B posso sempre preferire N. Posso inoltre rinunciare ad O visto che eventualmente lo posso sostituire con N (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	M	F	Q	E	R	T	P	L	N	H
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30	32=16+11+5	30=17+9+4	L,E,M
25	26=11+6+4+5	23=9+5+5+4	E,Q,F,M
29	31=14+11+6	27=13+9+5	T,E,Q
21	22=11+6+5	18=9 +5+4	E,Q,M

Problema 5 (8 punti):

$$
\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4
$$
$$
\begin{cases}
-4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\
2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \leq -5 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{cases}
$$

5.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

5.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

5.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

5.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

5.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile “di colla” x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rrrrrcr}
-4x_1 + & 5x_2 - & 3x_3 + & x_4 - & x_0 & \leq & 5 \\
2x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 - & x_0 & \leq & -5 \\
2x_1 - & x_2 + & 2x_3 - & x_4 - & x_0 & \leq & 4 \\
\multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & 5 + & 4x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 + & x_0 \\
w_2 & = & -5 - & 2x_1 + & 5x_2 - & x_3 + & x_4 + & x_0 \\
w_3 & = & 4 - & 2x_1 + & x_2 - & 2x_3 + & x_4 + & x_0 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 15 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - w_2 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & 10 + & 6x_1 - & 10x_2 + & 4x_3 - & 2x_4 + & w_2 \\
x_0 & = & 5 + & 2x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 + & w_2 \\
w_3 & = & 9 & - & 4x_2 - & x_3 & + & w_2 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 1$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 & - & w_2 + & 2x_0 \\
x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 - & \frac{1}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 - & \frac{1}{5}x_0 \\
w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{4}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 + & \frac{4}{5}x_0 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6x_1 - 5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2\right) - 3x_3 - 4x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 - 3x_4 - w_2$).

$$
\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 - 3x_4 - w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = 2x_1 + 2x_3 - w_2 \\
x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2 \\
w_3 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_1 esce w_3 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\max\ \frac{15}{2} - \frac{5}{2}w_3 - \frac{17}{2}x_3 - x_4 - \frac{1}{2}w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = \frac{25}{4} - \frac{5}{4}w_3 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 - \frac{3}{4}w_2 \\
x_2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}w_3 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\
x_1 = \frac{25}{8} - \frac{5}{8}w_3 - \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{8}w_2 \\
x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi); non sono quindi necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{25}{8}$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = x_4 = 0$ cui corrisponde un valore di $\frac{15}{2}$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{1}{2}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{5}{2}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{15}{2}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{2}$ (almeno per piccoli incrementi).Per ogni unità di incremento del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{5}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del primo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul terzo vincolo sia $4 + t_3$ (invece di 4) e che la quantitá di risorsa disponibile sul secondo vincolo sia $-5 + t_2$ (invece di -5). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, k_1, k_2 e k_3 della colonna dei termini noti.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & k & w_3 & x_3 & x_4 & w_2 \\
z & K & -\frac{5}{2} & -\frac{17}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\
w_1 & k_1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\
x_2 & k_2 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
x_1 & k_3 & -\frac{5}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

con la soluzione di base iniziale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $z = 0$, $w_1 = 5$, $w_2 = -5+t_2$, $w_3 = 4+t_3$, come associata al tableau iniziale del problema modificato (il tableau di definizione delle variabili di slack). Si perviene cosí alle seguenti equazioni di controllo:

$$
\begin{array}{rcl}
(0) & = & K - \frac{5}{2}(t_3+4) - \frac{1}{2}(t_2-5) \longrightarrow K = \frac{15}{2} + \frac{5}{2}t_3 + \frac{1}{2}t_2 \\
(5) & = & k_1 - \frac{5}{4}(t_3+4) - \frac{3}{4}(t_2-5) \longrightarrow k_1 = \frac{25}{4} + \frac{5}{4}t_3 + \frac{3}{4}t_2 \\
(0) & = & k_2 - \frac{1}{4}(t_3+4) + \frac{1}{4}(t_2-5) \longrightarrow k_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t_2 \\
(0) & = & k_3 - \frac{5}{8}(t_3+4) + \frac{1}{8}(t_2-5) \longrightarrow k_3 = \frac{25}{8} + \frac{5}{8}t_3 + \frac{1}{8}t_2
\end{array}
$$

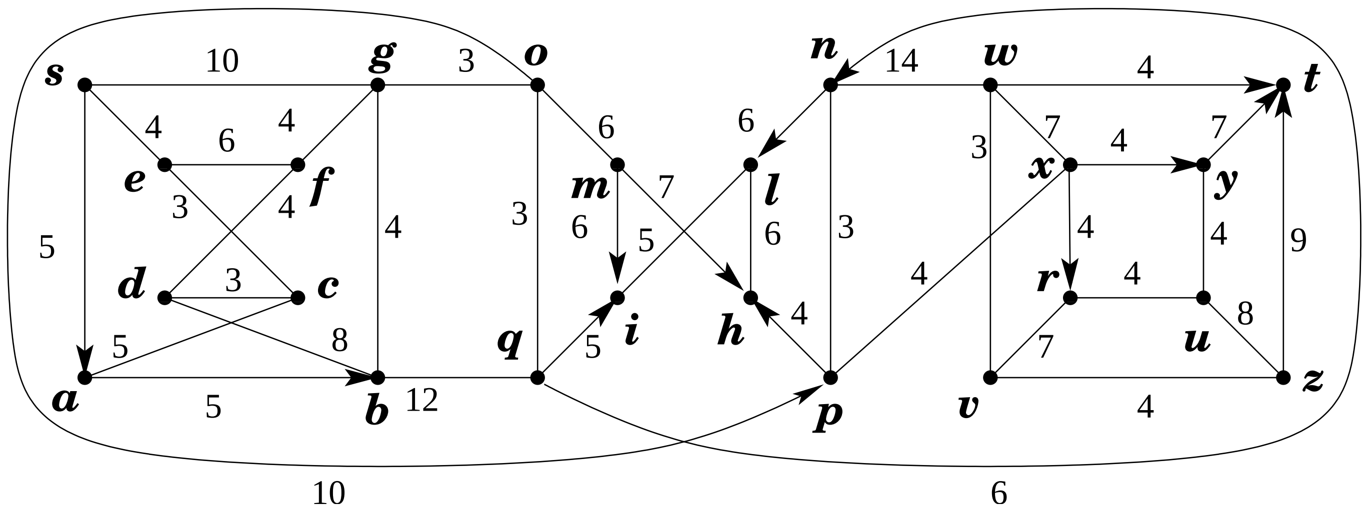
La prima equazione (valore di K) conferma l'interpretazione economica (prezzi ombra) delle variabili duali esprimendo il valore della funzione obbiettivo per quella soluzione di base al variare di t_3 e t_2. Poiché tutti gli altri coefficienti della funzione obbiettivo restano negativi, questa soluzione di base (intesa come partizionamento tra la variabili in base e quelle fuori base) rimarrá sempre ottima. Dobbiamo solo andare a studiare per quali valori di t_3 e t_2 essa resti ammissibile. Imponiamo quindi le tre condizioni di ammissibilitá $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$. Otteniamo che t_3 puó crescere a piacere (ossia non ci sono limiti all'acquisto in risorsa 1 al suo prezzo ombra) mentre $t_2 \leq 9$ (ossia oltre le 9 unitá extra in risorsa 2 il valore marginale di quella risorsa diminuisce). Piú precisamente $t_2 \leq 9 + t_3$.

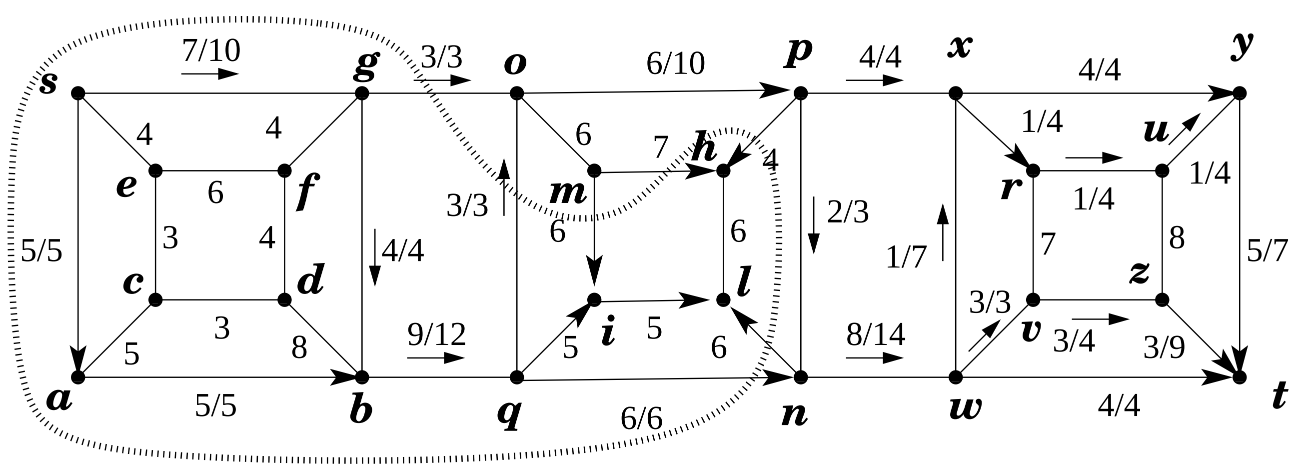
Problema 6 (4 punti):

6.1 **(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.2 **(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.





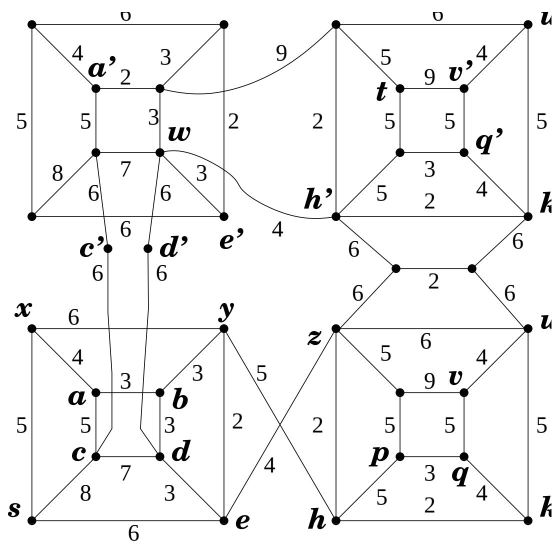
Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 3 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 7 (12 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

7.1.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

7.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

7.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo. (Certificando che la rimozione di quel



numero di archi è sufficiente a renderlo bipartito ed argomentando che esso é anche necessario).

7.4.**(1+1pt)** Nel grafo G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

7.5.**(1pt)** Nel grafo G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.7.**(1+1pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xy. Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$M(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$F(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$Q(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$E(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$(13,14)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	19	22	21	·	·	25	26	·	·	30	31	·	·	31
$(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	·	25	26	23	22	30	31	28	29	31
$(17,16)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	M	F	Q	E	R	T	P	L	N	H
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22