Esame di Ricerca Operativa - 13 giugno 2012
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

La fonderia Beldur produce un acciaio, ottenuto dalla fusione di 4 diversi materiali grezzi. Il costo unitario (Euro/kg) di ciascun materiale e la su composizione espressa in percentuali kg/kg di materiale, sono espressi nella seguente tabella:

	% alluminio	% silicio	% carbonio	costo al kg
materiale 1	2	9	7	700
materiale 2	5	8	7	600
materiale 3	3	6	5	500
materiale 4	4	6	7	650

Si tenga conto che il prodotto finale deve contenere una percentuale di alluminio compresa tra il 3% e l'8%, una percentuale di silicio tra il 4% e il 5%, e una percentuale di carbonio non superiore al 5%. Formalizzare il problema di pianificare la produzione della fonderia con l'obiettivo di minimizzare i costi.

svolgimento.

Per $i = 0, 1, 2, 3, 4$, una variabile x_i indica la percentuale di materiale i (espressa in kg/kg) presente in ogni unitá di prodotto. Quindi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ e $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. L'obbiettivo di contenere i costi trova espressione nella funzione obbiettivo:

$$\min 700\, x_1 + 600\, x_2 + 500\, x_3 + 650\, x_4\,.$$

Ma dobbiamo tenere conto dei vincoli sulle percentuali di alluminio, silicio e carbonio. Questi trovano espressione nei seguenti vincoli lineari.

vincolo alluminio:

$$2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \geq 3\,, 2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \leq 8\,.$$

vincolo silicio:

$$9\,x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 \geq 4\,, 9\,x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 \leq 5\,.$$

vincolo carbonio:

$$7\,x_1 + 7\,x_2 + 5\,x_3 + 7\,x_4 \leq 5\,.$$

É bene non dimenticare di esprimere i vincoli di non-negativitá e non omettere la condizione di normalizzazione data dal significato delle x_i come percentuali.

$$x_i \geq 0 \text{ ed intera per ogni } i = 1, 2, 3, 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1\,.$$

Problema 2 (2+2 punti):

Data la formula booleana $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_3 \vee x_5)$ siamo interessati a quegli assegnamenti di valori di veritá alle variabili che rendano vera la formula (ossia che soddisfino ciascuna delle sue 5 clausole).

Assumiamo tuttavia che settare la variabile x_i a *true* comporti dei costi come da seguente tabella.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
cost of truth	2	5	-3	4	-1

(2pt) Formulare come problema di programmazione lineare intera (PLI) l'intento di soddisfare la formula a costo minimo.

(2pt) Piú in generale, data una formula booleana in forma normale congiuntiva $\Phi = \wedge_{i=1}^{m} \left(\vee_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} \right) \vee \left(\vee_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)} \right)$, ossia una disgiunzione (.OR.) di m clausole, dove p_i é un vettore che restituisce gli indici delle variabili che appaiono positive nella clausola i e $|p_i|$ indica la lunghezza di p_i, mentre n_i é un vettore che restituisce gli indici delle variabili che appaiono negate nella clausola i e, analogamente, $|n_i|$ é il numero di variabili che compaiono negate nella clausola i, si esprima come un problema di PLI la ricerca di assegnamenti di veritá che soddisfino alla formula a costo minimo, dove con c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, indichiamo il costo di settare la variabile x_j a *true*.

svolgimento.

Le variabili giá le abbiamo, sono le x_i che possono valere 0 (codifica del valore *false*) oppure 1 (codifica del valore *true*).

In questo modo la funzione obbiettivo da minimizzare é immediata:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

che nel caso dell'istanza specifica fornita risulta:

$$\min 2\,x_1 + 5\,x_2 + -3\,x_3 + 4\,x_4 - x_5 \, .$$

Vediamo ora i vincoli, trattando ora prima il caso specifico:

Clausola 1: $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$:

$$x_1 + x_2 + (1 - x_3) \geq 1, \quad \text{ossia} \quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 0,$$

Clausola 2: $(x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5)$:

$$x_3 + x_4 - x_5 \geq 0,$$

Clausola 3: $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4)$:

$$-x_1 + x_2 - x_4 \geq -1,$$

Clausola 4: $(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_5)$:

$$-x_2 + x_3 - x_5 \geq -1,$$

Clausola 5: $(\overline{x}_3 \vee x_5)$:

$$-x_3 + x_5 \geq 0,$$

Detta ora in astratto, ossia sul metalivello, la generica clausola $C_i = \left(\vee_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} \right) \vee \left(\vee_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)} \right)$, dove $|p_i|$ ed $|n_i|$ sono tesi ad indicare il numero di letterali positivi e nagativi della clausola i, $i = 1, 2, \ldots, m$, trova rappresentazione nel seguente vincolo lineare:

$$\sum_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} + \sum_{j=1}^{|n_i|} \left(1 - x_{n_i(j)}\right) \geq 1, \quad \text{ossia} \quad \sum_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} - \sum_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)} \geq 1 - |n_i| \,.$$

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \mathrm{C\,T\,G\,T\,G\,A\,G\,A\,A\,T\,C\,G\,C\,T\,G\,T\,A}$ e $t = \mathrm{G\,T\,A\,C\,G\,A\,C\,T\,G\,A\,A\,G\,C\,T\,A\,T}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \mathrm{G\,T\,A\,C\,G\,A\,C\,T\,G}$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \mathrm{C\,T\,G\,T\,G\,A\,G\,A}$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s ⌒	-	G	T	A	C	G	A	C	T	G	A	A	G	C	T	A	T
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
T	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
T	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
G	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
A	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
G	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
T	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
C	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
G	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
C	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
G	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
A	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	G T G A G A A G C T A
termina con 'C'	9	G T G A G A A G C
tra s e t_9	8	G T A G A C T G
tra s_8 e t	7	T G T G A G A

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

17	18	16	44	32	15	52	27	4	9	11	50	48	21	33	10	55	27	6	54	30	23	7	3	8	6	13

1.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.2(2pt) una sequenza è detta quasi-decrescente, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga sequenza quasi-decrescente che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 11. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	8	52, 50, 48, 33, 30, 23, 8, 6
quasi-decrescente	11	52, 50, 48, 33, 10, 55, 54, 30, 23, 7, 3
decrescente con 11	7	44, 32, 27, 11, 10, 6, 3

Problema 5 (8 punti):

$$\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

5.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

5.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

5.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

5.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

5.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rrrrrcr}
-4x_1 + & 5x_2 - & 3x_3 + & x_4 - & x_0 & \leq & 5 \\
2x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 - & x_0 & \leq & -5 \\
2x_1 - & x_2 + & 2x_3 - & x_4 - & x_0 & \leq & 4 \\
\multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & 5 + & 4x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 + & x_0 \\
w_2 & = & -5 - & 2x_1 + & 5x_2 - & x_3 + & x_4 + & x_0 \\
w_3 & = & 4 - & 2x_1 + & x_2 - & 2x_3 + & x_4 + & x_0 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 15 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - w_2 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & 10 + & 6x_1 - & 10x_2 + & 4x_3 - & 2x_4 + & w_2 \\
x_0 & = & 5 + & 2x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 + & w_2 \\
w_3 & = & 9 & - & 4x_2 - & x_3 & + & w_2 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 1$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$
\begin{array}{l}
\max \;\; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 & - & w_2 + & 2x_0 \\
x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 - & \frac{1}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 - & \frac{1}{5}x_0 \\
w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{4}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 + & \frac{4}{5}x_0 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 6x_1 - 5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2\right) - 3x_3 + 6x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 - w_2$).

$$
\begin{array}{l}
\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 - w_2 \\
\left\{\begin{array}{rclllll}
w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 & & - \quad w_2 \\
x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 - & \frac{1}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 \\
w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{4}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_1 esce w_3 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max\ \frac{15}{2} - \frac{5}{2}w_3 - \frac{17}{2}x_3 + 9x_4 - \frac{1}{2}w_2 \\
\left\{\begin{array}{rclllll}
w_1 & = & \frac{25}{4} - & \frac{5}{4}w_3 - & \frac{1}{4}x_3 + & x_4 - & \frac{3}{4}w_2 \\
x_2 & = & \frac{9}{4} - & \frac{1}{4}w_3 - & \frac{1}{4}x_3 - & \frac{4}{5}x_4 + & \frac{1}{4}w_2 \\
x_1 & = & \frac{25}{8} - & \frac{5}{8}w_3 - & \frac{9}{8}x_3 + & \frac{1}{2}x_4 + & \frac{1}{8}w_2 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_4 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_4 esce x_2 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max\ \frac{525}{16} - \frac{85}{16}w_3 - \frac{181}{16}x_3 - \frac{45}{4}x_2 + \frac{37}{16}w_2 \\
\left\{\begin{array}{rclllll}
w_1 & = & \frac{145}{4} - & \frac{25}{16}w_3 - & \frac{9}{16}x_3 - & \frac{5}{4}x_2 - & \frac{7}{16}w_2 \\
x_4 & = & \frac{45}{16} - & \frac{5}{16}w_3 - & \frac{5}{16}x_3 - & \frac{5}{4}x_2 + & \frac{5}{16}w_2 \\
x_1 & = & \frac{145}{32} - & \frac{25}{32}w_3 - & \frac{41}{32}x_3 - & \frac{5}{8}x_2 + & \frac{9}{32}w_2 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della w_2 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base w_2 esce w_1 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max\ \frac{25135}{112} - \frac{95}{7}w_3 - \frac{100}{7}x_3 - \frac{125}{7}x_2 - \frac{37}{7}w_1 \\
\left\{\begin{array}{rclllll}
w_2 & = & \frac{580}{7} - & \frac{25}{7}w_3 - & \frac{9}{7}x_3 - & \frac{20}{7}x_2 - & \frac{16}{7}w_1 \\
x_4 & = & \frac{3215}{112} - & \frac{10}{7}w_3 - & \frac{5}{7}x_3 - & \frac{15}{7}x_2 - & \frac{5}{7}w_1 \\
x_1 & = & \frac{6235}{224} - & \frac{25}{14}w_3 - & \frac{449}{224}x_3 - & \frac{10}{7}x_2 - & \frac{9}{14}w_1 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{6235}{224}$, $x_2 = x_3 = 0$, e $x_4 = \frac{3215}{112}$ cui corrisponde un valore di $\frac{25135}{112} = 224.4$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il primo vincolo moltiplicato per $\frac{16}{7}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{25}{7}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{25135}{112}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{16}{7}$ (almeno per piccoli incrementi).Per ogni unità di incremento del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{25}{7}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del secondo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul terzo vincolo sia $4 + t_3$ (invece di 4) e che la quantitá di risorsa disponibile sul primo vincolo sia $5 + t_1$ (invece di 5). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, k_1, k_2 e k_3 della colonna dei termini noti. Questo viene lasciato come esercizio.

Problema 6 (6 punti):

Progettare un problema di PL in forma standard (od argomentare che esso non esista) tale che:

6.1 (2pt) ha esattamente 3 soluzioni di base ottime;

6.2 (2pt) ha infinite soluzioni ottime ma nessuna di esse é di base;

6.3 (1pt) il duale ha una soluzione degenere;

6.4 (1pt) il duale ha almeno 2 soluzioni di base ottime.

svolgimento.

(6.1) occorre ragionare geometricamente: per avere tre spigoli ottimi nel politopo occorre essere in 3 dimensioni, ed avere una faccia (di fatto un triangolo) tutta di soluzioni ottime. Quindi,

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 \ \leq \ 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(6.2) non esiste un tale problema in forma standard poiché il teorema fondamentale della programmazione lineare afferma che ogni problema in forma standard con soluzione ottima dovrá avere almeno una soluzione ottima di base. (Quella su cui siede il simplesso quando termina).

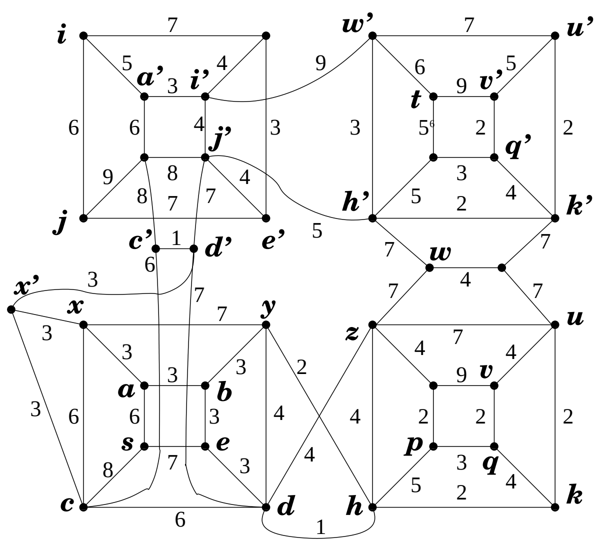
(6.3+6.4) se al problema sopra aggiungiamo un vincolo come segue:

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcl} x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 1 \\ & & x_3 & \leq & 1 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

allora la soluzione ottima di base nel punto $(0, 0, 1)$ diviene degenere poiché poggia anche sul vincolo aggiunto.

Ora si risolvono 6.3 e 6.4 contemporaneamente se di questo problema si scrive il duale. (Poiché il duale del duale é sempre il primale).

Problema 5 (18 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

7.2.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

7.3.**(1+1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo.

7.4.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

7.5.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.7. **(2pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xx'.

7.8. **(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

7.9. **(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

L'unica domanda che risulta decisamente nuova é la (5.7) ed é bene che io la svolga per illustrare come andava ben affrontata (quale sia la tipologia dei certificati).

- ij contenuto in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio che separa il nodo j da tutti gli altri.
- ab contenuto in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio di archi $ab, se, cd, xy, j'h', i'w'$ dagli altri nodi del grafo.
- $h'w$ contenuto in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa gli 8 nodi dei due cubi in alto da tutti gli altri nodi sotto, ma non contenuto in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wzdd'j'h'$.