

Esame di Ricerca Operativa - 28 settembre 2011

Facoltà di Ingegneria - Udine

- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

Formulare come un problema di PLI il problema di trovare la piú lunga sottosequenza strettamente crescente di una sequenza assegnata $s = s_1 s_2 \cdots s_n$ di valori interi.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \dots, n$, con l'idea che 1 significa "elemento s_i della sequenza s incluso nella sottosequenza soluzione" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Volendo massimizzare la cardinalità della sottosequenza crescente riscontrata adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i$$

Avremo una famiglia di vincoli intesi ad imporre la stretta crescenza: di fatto una sequenza é crescente se e solo se non contiene due elementi di cui il primo ecceda il secondo, ed é questa condizione "locale" che non risulta difficile formulare tramite i seguenti vincoli.

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \dots, m \text{ con } i < j \text{ tale che } s_i \geq s_j.$$

Problema 2 (8 punti):

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>A</i>	<i>R</i>	1	3	0	1	1	0	0	•
<i>B</i>	2	2	0	0	•	•	0	0	0
<i>C</i>	2	0	0	1	0	0	1	1	1
<i>D</i>	0	0	•	0	0	0	•	0	0
<i>E</i>	0	0	1	1	•	1	0	0	0
<i>F</i>	0	1	1	1	1	1	•	•	1
<i>G</i>	3	3	0	1	•	0	0	1	<i>H</i>

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B-3?

2.3 (1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in G-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

2.5(2pt) Quale é il massimo guadagno raccogliibile nella traversata da A-1 a G-9?

2.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	127	74	41	21	11	11	11	4	•
B	53	33	20	10	•	•	7	4	1
C	20	13	10	10	7	5	3	3	1
D	7	3	•	3	2	2	•	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A-1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	•	13	28
E	1	5	5	15	•	30	30	43	71
F	1	6	11	26	26	56	•	•	71
G	1	7	18	44	•	56	56	56	127

Ritrovare il valore 127 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A-1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0 ₁	1 ₁	4 ₁	4 ₁	5 ₁	6 ₁	6 ₁	6 ₁	•
B	2 ₁	4 ₁	4 ₂	4 ₃	•	•	6 ₁	6 ₂	6 ₂
C	4 ₁	4 ₂	4 ₄	5 ₇	5 ₇	5 ₇	7 ₁	8 ₁	9 ₁
D	4 ₁	4 ₃	•	5 ₇	5 ₁₄	5 ₂₁	•	8 ₁	9 ₁
E	4 ₁	4 ₄	5 ₄	6 ₁₁	•	6 ₂₁	6 ₂₁	8 ₁	9 ₁
F	4 ₁	5 ₅	6 ₉	7 ₂₀	8 ₂₀	9 ₂₀	•	•	10 ₁
G	7 ₁	8 ₁	8 ₁	9 ₁	•	9 ₂₀	9 ₂₀	10 ₂₀	10 ₂₁

Leggendo i valori riportati nella cella G-9 scopriamo che il massimo valore raccogliabile dal robot lungo la sua traversata é di 9, e che esistono 21 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A-1 → G-9	127
B-3 → G-9	20
A-1 → F-6	56
passaggio per D-5	40
massimo valore	10
numero di max-val paths	21

Problema 3 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \text{GTCTCACAATGCGTCTA}$ e $t = \text{CTAGCAGTCAACGTAT}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t .

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t ?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \text{CTAGCAGTC}$ di t ?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \text{GTCTCACA}$ di s ?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s	-	C	T	A	G	C	A	G	T	C	A	A	C	G	T	A	T
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
T	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
C	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
T	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
C	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
A	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
C	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
T	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
G	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
C	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
G	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
C	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
A	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	CTCACAACGTA
termina con 'C'	11	CTCACAACGTT
tra s e t_9	8	CTACAGTC
tra s_8 e t	7	TCTCACA

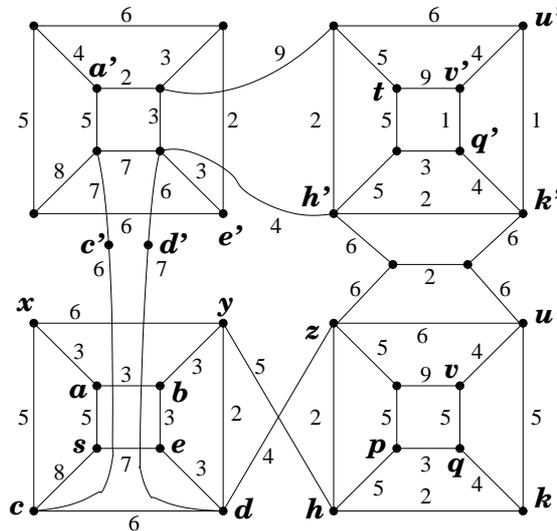
Problema 4 (9 punti):

Una raffineria produce due tipi di benzina: Magna ed Engrasa. Le benzine sono prodotte miscelando 2 prodotti base: q8freedom (Q) e preventivewar (P). Un litro di benzina Magna richiede 0,6 litri di Q e 0,2 litro di P, mentre un litro di benzina Engrasa richiede 0,2 litri di Q e 0,2 litri di P. Per la produzione settimanale la raffineria dispone di 9000 litri di Q e 8000 litri di P. I profitti di vendita per mille litri di benzina Magna ed Engrasa sono rispettivamente di 600 e 900 euro.

- 4.1(3pt) Definire il modello di Programmazione lineare per la determinazione della produzione settimanale di ciascun tipo di benzina in modo da massimizzare il profitto;
- 4.2(3pt) Determinare la soluzione ottima mediante l'algoritmo del simplesso;
- 4.2(1pt) Stabilire i prezzi ombra di q8freedom (Q) e preventivewar (P);
- 4.3(2pt) Dire per quale variazione della disponibilità di prodotto P la soluzione ottima non cambia.

Problema 5 (14 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.
- 5.2.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.
- 5.3.(1+1pt) Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.
- 5.4.(1+1pt) Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s . Esprimere la famiglia di tali alberi.
- 5.5.(2pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.6.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

risposte. Ormai lo storico di correzioni accumulate su questa tipologia di problemi é ampio, e mi eviteri quindi di comporre lo svolgimento. (Mi trovo coi tempi stretti per fare un buon lavoro, ed invero non ho nulla da aggiungere sul piano metodologico). Credo infatti possa essere importante lasciarvi invece anche degli esercizi per i quali non vi é fornita la soluzione già fatta, e non conoscete le risposte, sia come stimolo al fare senza indugi, e magari anche al confrontarvi tra di voi, che come palestra alla situazione esistenziale tipica del non avere certezze.