

# Facoltà di Ingegneria - Udine

## - CORREZIONE -

**Problema 1 (5 punti):**

Formulare come un problema di PLI il problema di trovare la piú lunga sottosequenza strettamente crescente di una sequenza assegnata  $s = s_1 s_2 \cdots s_n$  di valori interi.

**svolgimento.**

Abbiamo una variabile  $x_i \in \{0, 1\}$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ , con l'idea che 1 significa "elemento  $s_i$  della sequenza  $s$  incluso nella sottosequenza soluzione" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Volendo massimizzare la cardinalità della sottosequenza crescente riscontrata adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i$$

Avremo una famiglia di vincoli intesi ad imporre la stretta crescita: di fatto una sequenza é crescente se e solo se non contiene due elementi di cui il primo ecceda il secondo, ed é questa condizione "locale" che non risulta difficile formulare tramite i seguenti vincoli.

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \dots, m \text{ con } i < j \text{ tale che } s_i \geq s_j.$$

**Problema 2 (8 punti):**

Un robot  $R$ , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home  $H$  situata nella cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

**2.1(1pt)** Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

**2.2 (1pt)** e se la partenza è in B-3?

**2.3 (1pt)** e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

**2.4 (1pt)** e se con partenza in A-1 ed arrivo in G-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

**2.5 (2pt)** Quale é il massimo guadagno raccogliibile nella traversata da A-1 a G-9?

**2.6 (2pt)** Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

**svolgimento.** La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	250	149	80	36	14	14	14	4	•
B	101	69	44	22	•	•	10	4	1
C	32	25	22	22	16	11	6	3	1
D	7	3	•	6	5	5	3	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A-1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	•	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	•	•	194
G	1	7	18	44	•	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A-1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0 <sub>1</sub>	1 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	5 <sub>1</sub>	6 <sub>1</sub>	6 <sub>1</sub>	6 <sub>1</sub>	•
B	2 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	4 <sub>3</sub>	•	•	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>2</sub>
C	4 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	8 <sub>2</sub>	9 <sub>2</sub>	10 <sub>2</sub>
D	4 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	•	7 <sub>2</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>6</sub>	9 <sub>2</sub>	9 <sub>4</sub>	10 <sub>2</sub>
E	4 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	8 <sub>4</sub>	•	7 <sub>6</sub>	9 <sub>2</sub>	9 <sub>6</sub>	10 <sub>2</sub>
F	4 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	8 <sub>4</sub>	9 <sub>8</sub>	9 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	•	•	10 <sub>2</sub>
G	7 <sub>1</sub>	10 <sub>2</sub>	10 <sub>2</sub>	11 <sub>2</sub>	•	10 <sub>8</sub>	18 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	11 <sub>10</sub>

Leggendo i valori riportati nella cella G-9 scopriamo che il massimo valore raccogliabile dal robot lungo la sua traversata é di 11, e che esistono 10 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A-1 → G-9	250
B-3 → G-9	44
A-1 → F-6	56
passaggio per D-5	100
massimo valore	11
numero di max-val paths	10

### Problema 3 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe  $s = \text{TCGCGAGAACTGTGCGCA}$  e  $t = \text{GCATGATCGAAGTCAAC}$ . Fare lo stesso con alcuni prefissi di  $s$  e  $t$ .

**3.1(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e  $t$ ?

**3.2(1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

**3.3(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e il prefisso  $t_9 = \text{GCATGATCG}$  di  $t$ ?

**3.4(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $t$  e il prefisso  $s_8 = \text{TCGCGAGA}$  di  $s$ ?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra $s$ e $t_9$		
tra $s_8$ e $t$		

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

$s \setminus$	-	G	C	A	T	G	A	T	C	G	A	A	G	T	C	A	C
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
C	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
G	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
A	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
G	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
C	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
T	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
G	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
T	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
C	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
G	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
C	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
A	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	GCGAGAAGTCA
termina con 'C'	11	GCGAGAAGTCC
tra $s$ e $t_9$	8	GCAGATCG
tra $s_8$ e $t$	7	CGCGAGA

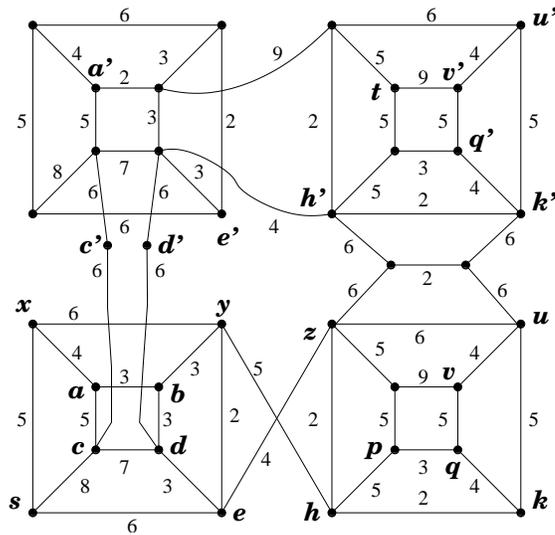
#### Problema 4 (5 punti):

Nel laboratorio di ricerca del Gran Sasso si stanno studiando alcune soluzioni per eliminare gli scarti tossici dal composto Z utilizzato per gli esperimenti nucleari. A seguito di uno studio condotto dai ricercatori, si ha che i termini di legge sui rifiuti tossici sono soddisfatti se in una tonnellata di composto Z è presente una percentuale di nichel compresa fra il 7% e l'11%, una percentuale di cadmio tra il 2% e il 5% e infine una percentuale di manganese tra l'1,5% e il 2%. Ogni tonnellata di composto Z è ottenuta miscelando insieme due diversi componenti, A e B, il cui contenuto di nichel, cadmio e manganese in percentuale è riportato, per ogni tonnellata, nella tabella seguente. In tabella sono riportati anche i costi per ogni tonnellata di componente. Formulare il problema di trovare la quantità di componenti A e B che produce una tonnellata di composto Z a minor costo, e che rispetta i requisiti di legge.

	Componente A	Componente B
Nichel	5%	8%
Cadmio	2%	3%
Manganese	1%	2%
Costo (MEuro per ton.)	3	4

**Problema 5 (14 punti):**

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.
- 5.2.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  sostituendo l'arco  $c'c$  con un arco  $c'x$  e l'arco  $d'd$  con un arco  $d'y$  è planare oppure no.
- 5.3.(1+1pt) Dire, certificandolo, se  $G$  e  $G'$  è bipartito oppure no.
- 5.4.(1+1pt) Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo  $s$ . Esprimere la famiglia di tali alberi.
- 5.5.(2pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.6.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .
- 5.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .

**risposte.** Ormai lo storico di correzioni accumulate su questa tipologia di problemi é ampio, e mi eviteri quindi di comporre lo svolgimento. (Mi trovo coi tempi stretti per fare un buon lavoro, ed invero non ho nulla da aggiungere sul piano metodologico). Credo infatti possa essere importante lasciarvi invece anche degli esercizi per i quali non vi é fornita la soluzione già fatta, e non conoscete le risposte, sia come stimolo al fare senza indugi, e magari anche al confrontarvi tra di voi, che come palestra alla situazione esistenziale tipica del non avere certezze.