Esame di Ricerca Operativa - 7 luglio 2011
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (3+3 punti):

Dato un grafo $G = (V, E)$, il problema CHROMATIC NUMBER chiede quale sia il minor numero di colori diversi che consenta di colorare tutti i nodi in modo che nodi adiacenti ricevano colori diversi. Ad esempio, un grafo é bipartito se 2 colori sono suficienti.

(3 punti) Formulare come un problema di PLI senza funzione obiettivo il problema di stabilire se $G = (V, E)$ sia bipartito.

(3 punti) Formulare come un problema di PLI il problema di stabilire il minor numero di colori che consenta la colorazione di $G = (V, E)$.

svolgimento.

riconoscimento di grafi bipartiti. Abbiamo una variabile $x_{v,i} \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2$ e $v \in V$, con l'idea che $x_{v,i} = 1$ significa "il nodo v del grafo viene colorato con il colore i" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra. I vincoli sono i seguenti:

ogni nodo viene colorato $x_{v,1} + x_{v,2} \geq 1$ per ogni $v \in V$;

nodi adiacenti non possono ricevere lo stesso colore
$x_{u,1} + x_{v,1} \leq 1$ per ogni $uv \in E$;
$x_{u,2} + x_{v,2} \leq 1$ per ogni $uv \in E$.

determinazione del chromatic number. Ovviamente esiste sempre una colorazione di al più n colori, dove $n = |V|$. Ma talvolta risulta possibile risparmiare dei colori. Introduciamo quindi una variabile di utilizzo colore $y_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, con l'idea che $y_i = 1$ significa "il colore i viene utilizzato per colorare almeno un nodo del grafo" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Abbiamo inoltre una variabile $x_{v,i} \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ e $v \in V$, con l'idea che $x_{v,i} = 1$ significa "il nodo v del grafo viene colorato con il colore i" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

La funzione obiettivo è quindi:

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i \, .$$

E i vincoli sono i seguenti:

ogni nodo viene colorato $\sum_{i=1}^{n} x_{v,i} \geq 1$ per ogni $v \in V$;

nodi adiacenti non possono ricevere lo stesso colore $x_{u,i} + x_{v,i} \leq 1$ per ogni $uv \in E$ e per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$;

ogni colore impiegato viene dichiarato $y_i \geq \sum_{v \in V} x_{v,i}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 2 (4 punti):

Un traghetto ha tre compartimenti per il trasporto delle merci: prua, poppa, stiva. Vi sono dei limiti sul peso e volume di merce trasportabile nei tre compartimenti. La seguente tabella specifica tali limiti in megagrammi (tonnellate) ed in metri cubi, rispettivamente:

Compartimento	Peso (Mg)	Spazio (m^3)
Prua	10	6800
Poppa	16	8700
Stiva	8	5300

Inoltre, per garantire un galleggiamento bilanciato del traghetto, il peso del carico deve essere ripartito sui tre compartimenti secondo le stesse percentuali delle capacità totali dei singoli compartimenti.

Per il prossimo viaggio abbiamo a disposizione le seguenti 4 tipologie di merce da carico.

Cargo	Peso (Mg)	Volume (m^3/Mg)	Profitto (Euro/Mg)
C_1	18	480	310
C_2	15	650	380
C_3	23	580	350
C_4	12	390	285

Una qualsiasi porzione di queste merci disponibili può essere trasportata (la tabella specifica solo la quantità massima, ossia quella attualmente presente nei magazzini di terra). Formulare come problema di programmazione lineare il problema di determinare quanto trasportare di ciascuna merce e come ripartirla sui compartimenti col fine di massimizzare il profitto.

Problema 3 (4 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	·	·	·	·	·	·	·	●
B	·	·	●	·	●	●	·	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	●	·	·	·	●	·	·
E	·	·	·	·	●	·	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	·	●	·
G	·	·	·	·	●	·	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (●). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

consegna	numero percorsi
A–1 $\to$ G–9	
B–3 $\to$ G–9	
A–1 $\to$ F–6	
passaggio per D–5	

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = ATGTCAGAAGAGTCGTA$ e $t = GTACTGACTGAAGGTAT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

4.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'C'?

4.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = TGAAGGTAT$ di t?

4.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s^{14} = ATGTCAGAAGAGTC$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'C'		
tra s e t_9		
tra s^{14} e t		

Problema 5 (4+2 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

63	18	55	81	7	9	25	13	31	47	70	83	4	32	16	61	43	20	15	54	63	99	43	14	27

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) trovare quante sono le sottosequenze crescenti di lunghezza massima.

5.3(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 47. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
2	1	4	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	8	4	3	9	8	7	7	6	4	3	2	6	5	5	3	4	4	4	3	2	1	1	2	1
63	18	55	81	7	9	25	13	31	47	70	83	4	32	16	61	43	20	15	54	63	99	44	14	27
1	1	2	3	1	2	3	3	4	5	6	7	1	5	4	6	6	5	4	7	8	9	7	4	6
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	7, 9, 25, 31, 32, 43, 54, 63, 99
quante	2	7, 9, (13-25), 31, 32, 43, 54, 63, 99
Z-sequenza	13	7, 9, 13, 31, 47, 70, 83, 4, 32, 43, 54, 63, 99
crescente con 47	8	7, 9, 13, 31, 47, 54, 63, 99

Problema 6 (6 punti):

6.1**(1pt)** É possibile costruire un problema di PL che sia illimitato ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Certificare la risposta.

6.2**(1pt)** É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale sia anch'esso non ammissibile? Certificare la risposta.

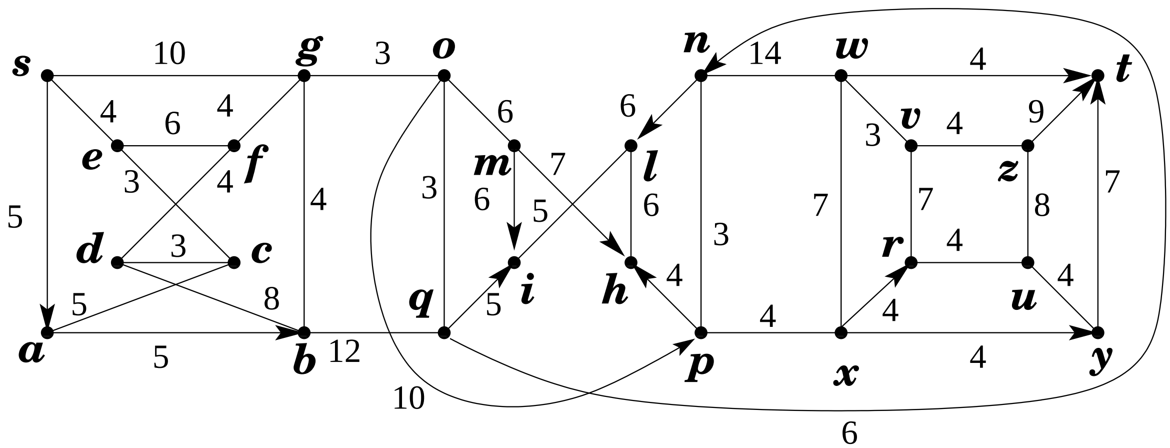
6.3**(1pt)** É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Certificare la risposta.

6.4**(1pt)** Costruire un problema di PL in forma standard il cui duale abbia infinite soluzioni ottime e precisamente 2 soluzioni ottime di base.

6.5**(1pt)** Costruire un problema di PL in forma standard con due variabili e precisamente 5 soluzioni ottime di base.

6.6**(1pt)** Costruire un problema di PL in forma standard la cui unica soluzione ottima sia degenere.

Problema 7 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

7.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

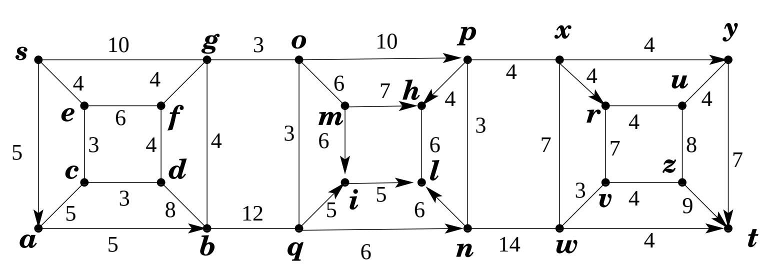
7.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

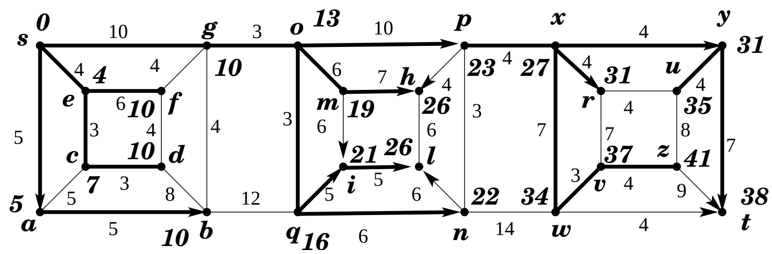
7.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

7.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

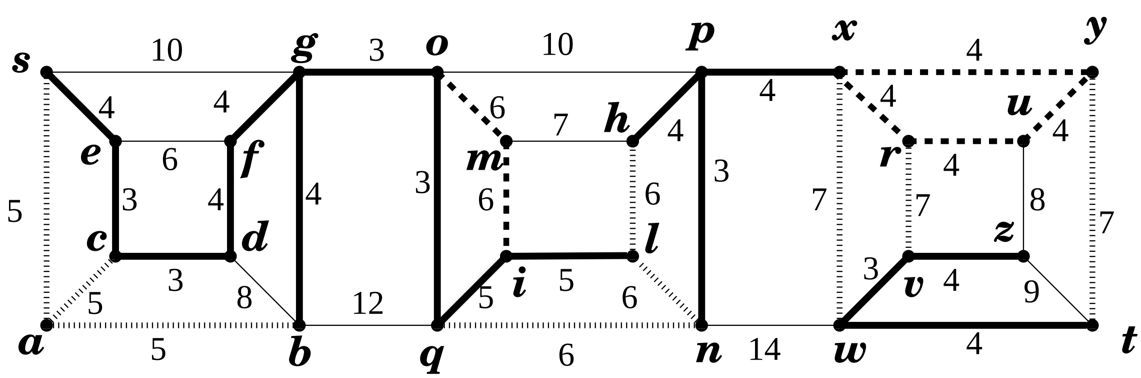
risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



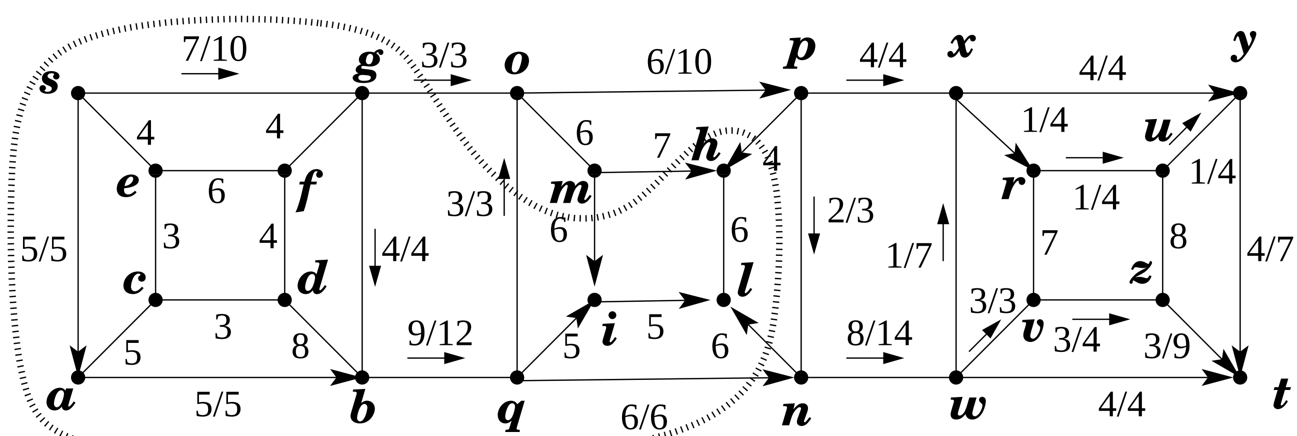
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s, t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.