

Problema 1 (5 punti):

Formulare come un problema di PLI il problema di trovare la piú lunga sottosequenza comune di due stringhe assegnate $s = s_1s_2 \cdots s_n$ e $t = t_1t_2 \cdots t_m$.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_{i,j} \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, con l'idea che 1 significa "carattere s_i della stringa s incluso nella sottosequenza soluzione e posto in corrispondenza col carattere t_j della stringa t " mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Volendo massimizzare la cardinalità della sottosequenza comune adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j}$$

Avremo una famiglia di vincoli per imporre che al piú un carattere di s possa essere messo in corrispondenza con uno stesso carattere di t .

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \leq 1 \text{ per } j = 1, 2, \dots, m.$$

Analogamente, al piú un carattere di t può essere accoppiato ad ogni singolo carattere di s .

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq 1 \text{ per } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ed ovviamente, posso accoppiare s_i a t_j solo ove questi caratteri siano uguali.

$$x_{i,j} = 0 \text{ per ogni coppia di indici } i \text{ e } j \text{ con } s_i \neq t_j.$$

Ecco una possibile famiglia di vincoli per imporre la proprietà di monotonia insita nel problema:

$$x_{i_1, j_1} + x_{i_2, j_2} \leq 1 \text{ se } i_1 > i_2 \text{ e } j_1 < j_2.$$

Problema 2 (4 punti):

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	•
B	•	•	.	.	.
C
D	.	.	•	.	.	.	•	.	.
E	•
F	•	•	.
G	•	.	.	.	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B-3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in G-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	127	74	41	21	11	11	11	4	•
B	53	33	20	10	•	•	7	4	1
C	20	13	10	10	7	5	3	3	1
D	7	3	•	3	2	2	•	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle altre due domande compilo un'ulteriore tabella.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	•	13	28
E	1	5	5	15	•	30	30	43	71
F	1	6	11	26	26	56	•	•	71
G	1	7	18	44	•	56	56	56	127

Ritrovare il valore 127 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

L'ultima domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A-1 → G-9	127
B-3 → G-9	20
A-1 → F-6	56
passaggio per D-5	40

Problema 3 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \text{ACTCTGTGGCATACTCG}$ e $t = \text{TCGATGACTGGTACGC}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t .

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t ?

3.2(1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \text{TCGATGACT}$ di t ?

3.4(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \text{ACTCTGTG}$ di s ?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

$s \setminus t$	-	T	C	G	A	T	G	A	C	T	G	G	T	A	C	G	C
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
T	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
C	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
T	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
G	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
T	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
G	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
G	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
C	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
A	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
T	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
A	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
C	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
C	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
G	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	TCTGTGGTACG
termina con 'C'	11	TCTGTGGTACC
tra s e t_9	8	TCGTGACT
tra s_8 e t	7	CTCTGTG

Problema 4 (5 punti):

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 \quad \quad \quad + x_4 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

- 4.1(2pt)** Senza determinare esplicitamente la soluzione ottima, ma comunque certificando la risposta, si vuole sapere se il valore della soluzione ottima sia minore, maggiore, o eguale a 1.
- 4.2(2pt)** Scrivere il problema duale.
- 4.3(1pt)** Fornire certificato immediato (che non richieda riferimento esplicito al duale) per la tua risposta di cui al punto 1.

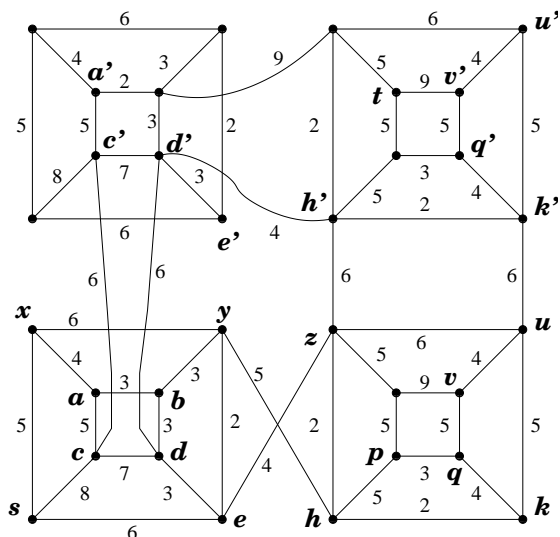
svolgimento.

La seconda domanda potrebbe di fatto essere un suggerimento su come affrontare il primo punto (nell'ipotesi che l'ottimo sia minore di 1 siamo chiamati ad un ruolo che é quello del duale). Si veda il tema del 22 febbraio 2011 per una traccia su come vada affrontato questo problema e si sviluppi tale traccia sui dati di questo esercizio.

Problema 5 (14 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

- 5.1.(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.
- 5.2.(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'e$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.
- 5.3.(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.
- 5.4.(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s . Esprimere la famiglia di tali alberi.
- 5.5.(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.



- 5.6.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

risposte. Ormai lo storico di correzioni accumulate su questa tipologia di problemi é ampio, e mi eviteri quindi di comporre lo svolgimento. (Mi trovo coi tempi stretti per fare un buon lavoro, ed invero non ho nulla da aggiungere sul piano metodologico). Credo infatti possa essere importante lasciarvi invece anche degli esercizi per i quali non vi é fornita la soluzione già fatta, e non conoscete le risposte, sia come stimolo al fare senza indugi, e magari anche al confrontarvi tra di voi, che come palestra alla situazione esistenziale tipica del non avere certezze.