Esame di Ricerca Operativa - 4 settembre 2008
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

$$\max\ 11x_1 - 5x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 10x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(2pt) Impostare il problema ausiliario.

6.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

6.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

6.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei due vincoli? (Per piccole variazioni.)

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 8 \\ 10x_1 - 5x_2 + x_3 - x_0 \leq -10 \\ x_0, x_1, x_3, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 8 - 10x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ w_2 = -10 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 10 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max\ -10 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 13 - 4x_2 - x_3 + w_2 \\ x_0 = 10 + 10x_1 - 5x_2 + x_3 + w_2 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. A farle posto è la x_0 che si annulla, quindi il problema originario era ammissibile (basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla (in caso di dizionario degenere potrei anche decidere di portare fuori base un'altra variabile, ma non sarebbe una buona idea ...).

$$\begin{array}{l} \max \ -x_0 \\ \left\{ \begin{array}{rcl} w_1 & = & 10 - 8x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_2 & = & 2 + 2x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 - \frac{1}{5}x_0 \\ \multicolumn{3}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$\begin{array}{l} \max \ 11x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -10 + x_1 - 4x_3 - w_2 \\ \left\{ \begin{array}{rcl} w_1 & = & 10 - 8x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_2 & = & 2 + 2x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portano in base x_1 esce w_1 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$\begin{array}{l} \max \ -\frac{35}{4} - \frac{1}{8}w_1 - \frac{160}{40}x_3 - \frac{39}{40}w_2 \\ \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{4} - \frac{1}{8}w_1 - \frac{9}{40}x_3 + \frac{1}{40}w_2 \\ x_2 & = & \frac{9}{2} - \frac{2}{8}w_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di $-\frac{35}{4}$ per la funzione obiettivo.

Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{8}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{39}{40}$ (almeno per piccoli incrementi).

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	13	4	22	52	27	22	29	23	9	47	48	20	5	15	17	24	13	5	17
valore	26	10	42	60	40	42	32	40	22	99	64	20	8	24	40	44	24	12	32

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 36, ottenendo:

nome	B	O	T	I	S	A	P	U	Q	H	F	C	N	R	G	E
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	10	8	12	22	24	26	24	32	40	20	42	42	40	44	40	30

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che U e Q esauriscono da soli la capacità dello zaino (non posso aggiungere nemmeno l'elemento più leggero B) totalizzando solo 72 mentre B, P e Q raccolgono più valore con lo stesso ingombro. E quindi posso sempre preferire di prendere Q piuttosto che non U, o H, o N, o G, o E. Analogamente, posso rinunciare sempre a C visto che eventualmente lo posso sostituire con F (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	B	O	T	I	S	A	P	Q	F	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	84=40+22+12+10	35=17+9+5+4	Q,I,T,B
26	62=40+12+10	26=17+5+4	Q,T,B
33	74=40+22+12	31=17+9+5	Q,I,T
22	52=40 +12	22=17+5	Q,T

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

5	-1	4	-5	7	-18	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-51	21	-13	24	-19	25

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere sia il 14-esimo che il 16-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
5	4	8	3	10	0	31	13	36	5	21	0	5	0	30	8	14	6	27	2	15	0	21	8	32	0	25
5	-1	4	-5	7	-18	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-51	21	-13	24	-19	25
25	20	21	17	22	15	31	0	23	0	16	0	20	15	30	0	19	13	21	0	13	0	32	11	24	0	25
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	32	23	25	21	24
include primo	25	1	7	5	31
include 18-esimo	27	15	19	30	21
include 14-esimo e 16-esimo	17	13	19	5	21

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

15	23	25	30	22	33	44	50	21	41	67	26	47	35	60	62	24	27	19	42	61	29	45	54	28

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
15	23	25	30	22	33	44	50	21	41	67	26	47	35	60	62	24	27	19	42	61	29	45	54	28
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	8
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

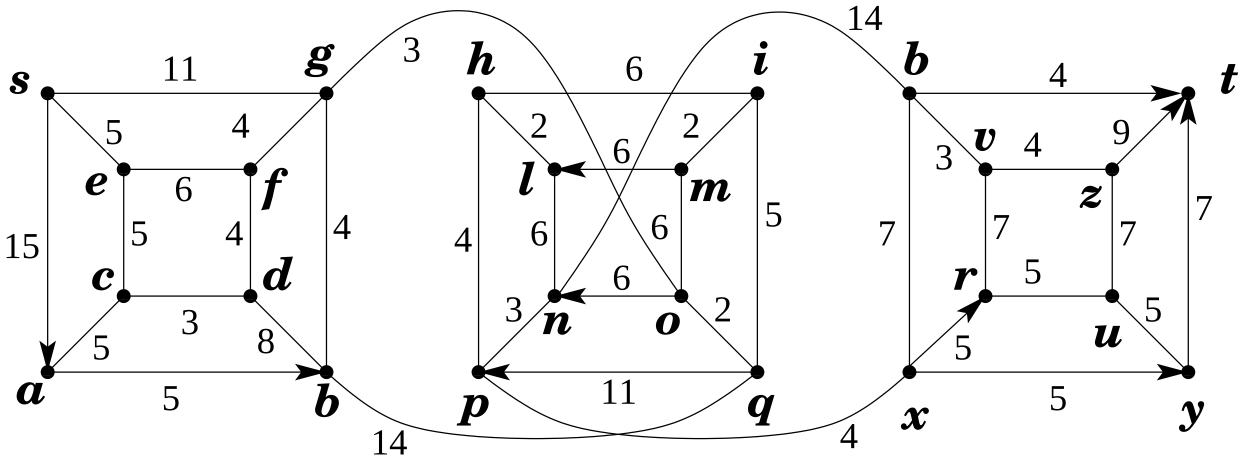
CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	15, 23, 25, 30, 33, 44, 50, 60, 62
N-sequenza	14	15, 23, 25, 30, 33, 44, 50, 60, 62, 24, 27, 42, 45, 54
crescente con 21	7	15, 21, 26, 35, 42, 45, 54

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

Problema 5 (17 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo i certificati del caso.

5.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.4.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

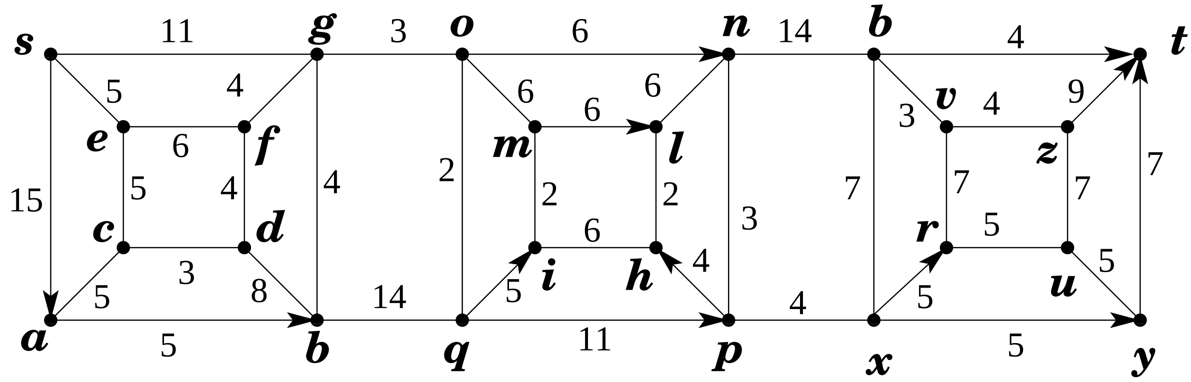
5.5.**(2pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

5.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

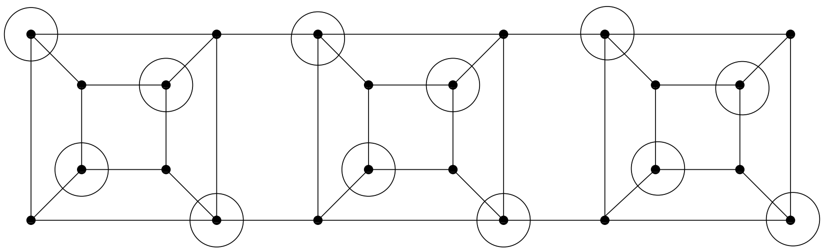
5.8.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte.
Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.



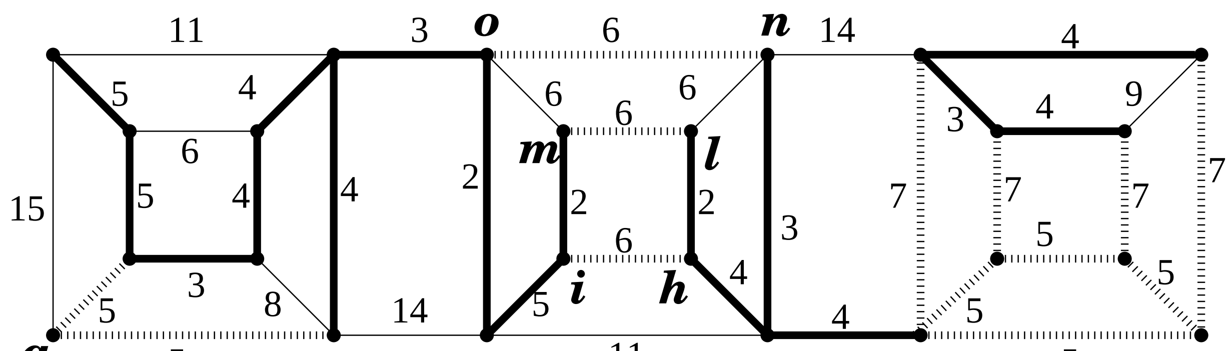
Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

Il fatto che G sia bipartito può essere messo in evidenza esibendo la 2-colorazione in figura.

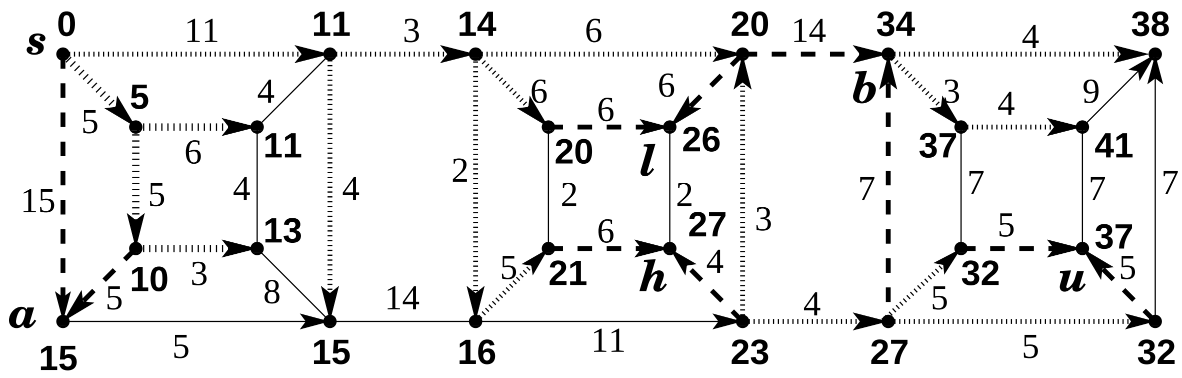


Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 0.

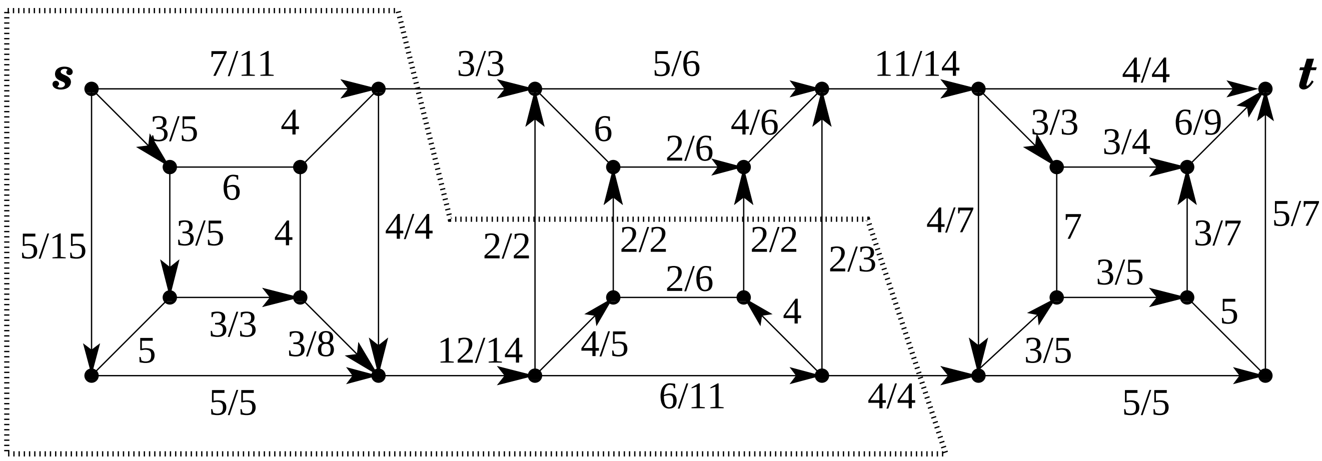
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on, ml, ih), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^5 = 32$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo b, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo h, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo l e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo u.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 15 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 15 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 6 (4+1 punti):

La PhotoMegaLux, azienda leader nella produzione di materiali ad uso fotografico, sta studiando i tempi di reazione di un nuovo acido per lo sviluppo di fotografie professionali. Sperimentalmente sono stati calcolati i tempi di sviluppo di una fotografia in base alla quantità di acido impiegato. In tabella sono riportati i tempi di sviluppo t in funzione delle quantità q di acido, per come rilevati empiricamente su 5 campioni di un provino.

campione	1	2	3	4	5
litri	0.3	0.5	0.6	0.7	0.9
secondi	30	15	4.5	3.5	2.6

La colonna $(i+1)$-esima della tabella $(1 \leq i \leq 10)$ dice che sul campione i, dove sono stati utilizzati q_i litri di acido, la reazione ha avuto luogo in t_i secondi.

Sulla base dei dati sperimentali si vuole trovare una legge del tipo $t = A\,q^2 + B\,q + C$ che approssimi il più possibile l'andamento del tempo di reazione dell'acido. In particolare, si vorrebbe determinare una coppia di valori per i coefficienti a e b in modo che lo scostamento massimo $\max_{i=1}^{5} |t_i - A\,q_i^2 - B\,q_i - C|$ sia il piú contenuto possibile.

Fornire un modello di programmazione lineare per tale problema. Meglio se il modello viene fornito in forma astratta in modo da riferirisi ad un numero n arbitrario di campioni le cui misure possano essere prese in input da un database che raccolga i dati (una sequenza di n coppie (q_i, t_i)) raccolti in un ipotetico esperimento.

svolgimento.

Dobbiamo determinare il valore di tre variabili: A, B e C. Oltre ad esse, consideriamo le n quantità $\epsilon_i = |t_i - A\,q_i^2 - B\,q_i - C|$ (per $i = 1, 2, \ldots, n$), ed introduciamo la variabile $\epsilon = \max_{i=1}^{n} \epsilon_i$.

L'obiettivo é quello di minimizzare il massimo scostamento, ossia

$$\min \epsilon\,,$$

dove, per $i = 1, 2, \ldots, n$, sarà nostra cura riportare i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq t_i - A\,q_i^2 - B\,q_i - C \\ \epsilon &\geq A\,q_i^2 + B\,q_i + C - t_i \end{aligned}$$

Si noti che sia la funzione obiettivo che i $2\,n$ vincoli sono lineari nelle 4 variabili A, B, C ed ϵ. I coefficienti t_i, q_i^2 e q_i sono valori numerici ricavabili direttamente o per calcolo immediato dal database.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$B(4,10)$	0	·	·	·	10	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$O(5,8)$	0	·	·	·	10	8	·	·	·	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(5,12)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	·	30	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(9,22)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	·	44	42	·	·	·	52	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(13,24)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	34	44	42	·	·	46	52	·	·	56	58	·	·	·	68	66	·	·	·	76
$A(13,26)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	36	44	42	·	·	48	52	·	·	58	60	·	·	60	70	68	·	·	72	78
$P(15,24)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	36	44	42	36	·	48	52	46	44	58	60	56	58	60	70	68	68	66	72	78
$Q(17,40)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82
$F(22,42)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82
$R(24,44)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	B	O	T	I	S	A	P	Q	F	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44