Esame di Ricerca Operativa - 15 aprile 2008
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un'industria chimica produce tre composti chimici P_1, P_2 e P_3. Per la produzione dei composti P_1 e P_2 sono utilizzati due componenti C_1 e C_2. Riportiamo in tabella le quantità (in quintali) di componenti che devono essere impiegate per produrre un quintale di P_1 e P_2.

	C_1	C_2
P_1	0,7	0,3
P_2	0,2	0,8

Per la produzione di un quintale di P_3 devono essere impiegati il componente C_1 e il prodotto P2 nelle quantità riportate nella seguente tabella.

	C_1	P_2
P_3	0,4	0,6

Per il prossimo periodo devono essere immessi sul mercato almeno 500, 1000 e 1500 quintali di P_1, P_2 e P_3 rispettivamente. In un'ultima tabella riportiamo infine i prezzi (euro/quintale) di vendita dei tre composti.

prodotto	P_1	P_2	P_3
prezzo	70	60	85

Sapendo che sono disponibili in totale 1500 quintali di componente C_1 e 3000 quintali di componente C_2, formulare come problema di Programmazione Lineare il problema di massimizzare il profitto nel prossimo periodo produttivo.

svolgimento.

Per $i = 1, 2, 3$, denotiamo con x_i la quantità (in quintali) di prodotto P_i. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei tre prodotti ossia

$$\max R \quad = \quad 70\,x_1 + 60\,x_2 + 85\,x_3\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

vincoli produzione minima

$$x_1 \geq 500, \qquad x_2 \geq 1000, \qquad x_3 \geq 1500.$$

disponibilitá di componenti

$$\begin{aligned} 0,7\,x_1 + \ 0,2\,x_2 + \ 0,52\,x_3 &\leq 1500, \\ 0,3\,x_1 + \ 0,8\,x_2 + \ 0,48\,x_3 &\leq 3000. \end{aligned}$$

Nell'ultimo vincolo $0,48 = 0,6 \cdot 0,8$, mentre nel penultimo vincolo $0,52 = 0,4 + 0,12 = 0,4 + (0,6 \cdot 0,2)$.

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	47	27	28	48	9	5	17	24	52	17	4	22	22	15	5	13	23	13	20
valore	71	20	15	32	11	4	16	22	30	16	5	21	21	12	6	12	20	14	10

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 30, ottenendo:

nome	M	F	Q	E	R	T	P	G	L	U	N	O	S	H	B	C
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	16	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che $17 + 17 = 34 > 30$. E quindi posso sempre preferire di prendere L piuttosto che non G, o U, o C. Analogamente, ad S e B posso sempre preferire N. Posso inoltre rinunciare ad O visto che eventualmente lo posso sostituire con N (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	M	F	Q	E	R	T	P	L	N	H
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30	32=16+11+5	30=17+9+4	L,E,M
25	26=11+6+4+5	23=9+5+5+4	E,Q,F,M
29	31=14+11+6	27=13+9+5	T,E,Q
21	22=11+6+5	18=9 +5+4	E,Q,M

Problema 3 (4 punti):
Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

3	-3	4	-5	27	-8	44	-20	23	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	21	-13	24	-39	25

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di rimanere a destra del 15-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
3	0	4	0	27	19	63	43	66	35	51	19	23	8	47	25	31	23	44	10	21	0	21	8	32	0	25
3	-3	4	-5	27	-8	44	-20	23	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	21	-13	24	-39	25
65	62	65	61	66	39	47	3	23	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	11	0	32	11	24	0	25
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	66	5	9	27	23
include primo	65	1	9	3	23
include 18-esimo	44	5	19	27	21
a destra del 15-esimo	32	23	25	21	24

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

13	18	20	14	16	33	40	64	17	37	63	21	44	31	56	58	22	19	15	37	57	26	41	51	24

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 44. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	7	6	8	7	5	4	1	6	4	1	5	3	4	2	1	4	4	4	3	1	3	2	1	1
13	18	20	14	16	33	40	64	17	37	63	21	44	31	56	58	22	19	15	37	57	26	41	51	24
1	2	3	2	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	7	8	6	5	3	7	8	7	8	9	7
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

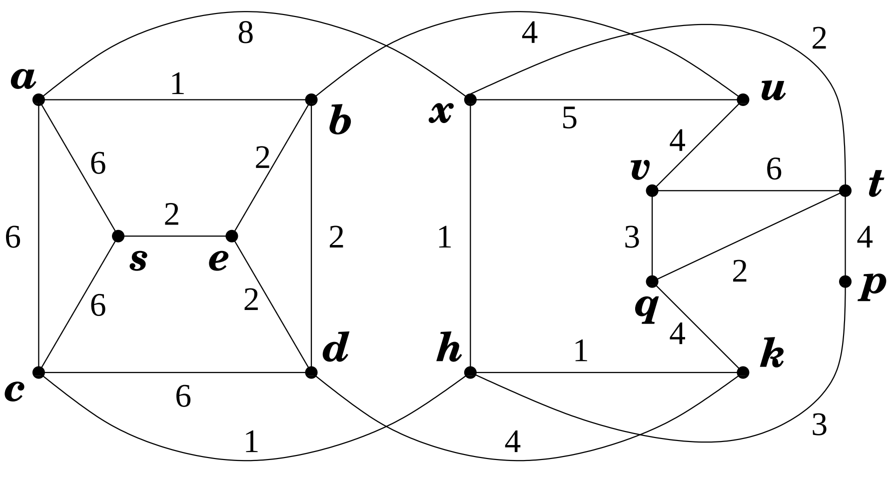
CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	13, 14, 16, 17, 21, 31, 37, 41, 51
N-sequenza	12	13, 14, 16, 33, 40, 64, 17, 21, 31, 37, 41, 51
crescente con 44	8	13, 14, 16, 17, 21, 44, 56, 58

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

Problema 5 (12 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

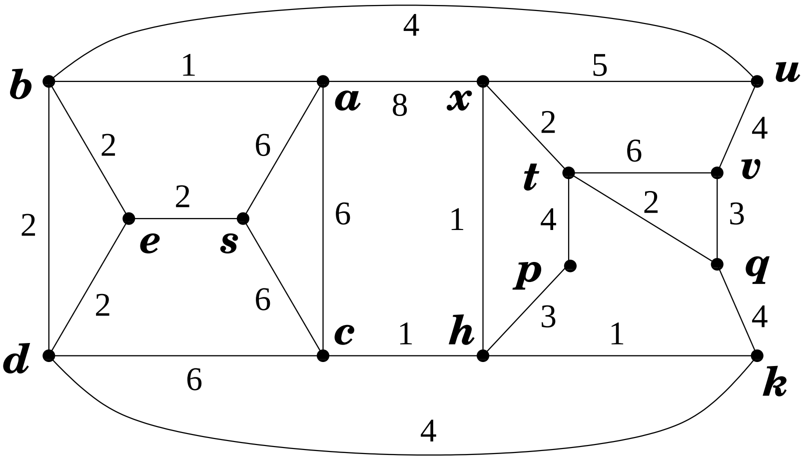
5.3.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.4.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.5.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

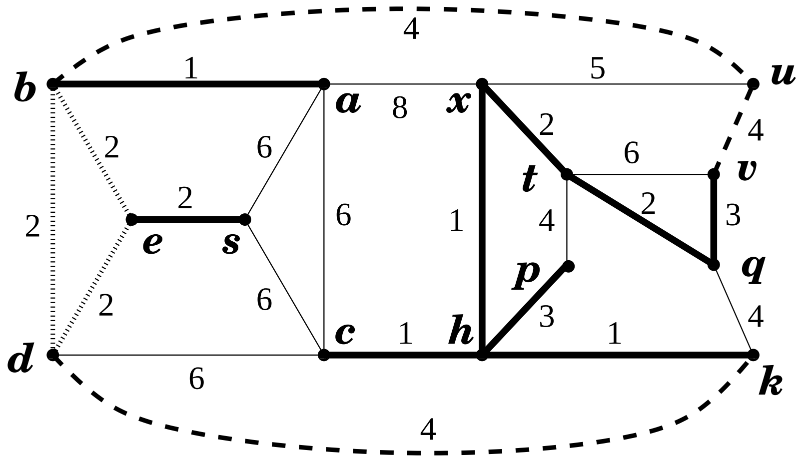
5.6.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto aggiungendo l'arco di estremi v e p è planare oppure no.

risposte.
Il fatto che G sia planare è messo in evidenza dal planar embedding fornito in figura.

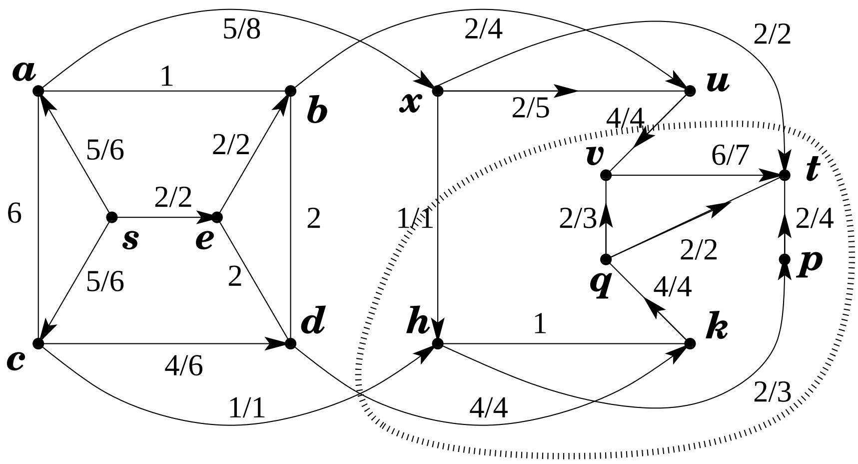


Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 9 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 9 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea tratteggiata, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 2 ed in linea sfumata spessa.

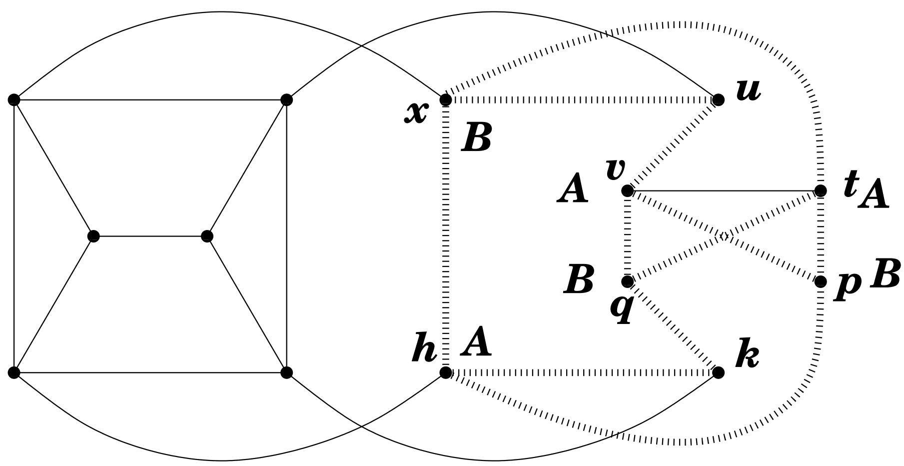


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì).

Il fatto che $G + vp$ non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.



Problema 6 (7 punti):
Si consideri la soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 14$, $x_5 = 11$, $x_6 = 1$ del seguente problema.

$$
\max\ 12x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_5 + 6x_6
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 & \leq 10 \\
x_3 + x_4 & \leq 14 \\
x_5 + x_6 & \leq 12 \\
x_1 + x_3 + x_5 & \leq 20 \\
x_2 + x_4 + x_6 & \leq 15 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

6.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

6.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

6.3.**(2pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

6.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

6.5.**(2pt)** La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$
\begin{cases}
(0) + (0) & = 0 \leq 10 \\
(0) + (14) & = \mathbf{14} \leq 14 \\
(11) + (1) & = \mathbf{12} \leq 12 \\
(0) + (0) + (11) & = 11 \leq 20 \\
(0) + (14) + (1) & = \mathbf{15} \leq 15
\end{cases}
$$

Il problema duale è il seguente.

$$
\min\ 10\,y_1 + 14\,y_2 + 12\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5
$$

$$
\begin{cases}
y_1 + y_4 & \geq 12 \\
y_1 + y_5 & \geq 20 \\
y_2 + y_4 & \geq 10 \\
y_2 + y_5 & \geq 10 \\
y_3 + y_4 & \geq 1 \\
y_3 + y_5 & \geq 6 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = y_4 = 0$ poichè i vincoli 1 e 4 del primale non sono soddisfatti ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_4, x_5, x_6 > 0$, i vincoli 4,5 e 6 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$
\begin{cases}
y_2 + y_5 & = 10 \\
y_3 & = 1 \\
y_3 + y_5 & = 6
\end{cases}
$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 5, 1, 0, 5)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 1, 2 e 3). A questo punto emergono diverse violazioni.

$$\begin{cases} y_1 & & + & y_4 & & \geq & 12 \\ y_1 & & & & + \; y_5 & \geq & 20 \\ & y_2 & + & y_4 & & \geq & 10 \\ \multicolumn{7}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0} \end{cases}$$

Infatti nessuno dei tre vincoli risulta soddisfatto. Da quanto detto (la violazione della non-negatività era già di per se sufficiente) ne consegue che la soluzione primale assegnata **non è ottima**.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$M(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$F(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$Q(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$E(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$R(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$T(13,14)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	19	22	21	·	·	25	26	·	·	30	31	·	·	31
$P(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	·	25	26	23	22	30	31	28	29	31
$L(17,16)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$N(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$H(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	M	F	Q	E	R	T	P	L	N	H
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22