Esame di Ricerca Operativa - 20 settembre 2007
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. L'indagine deve essere svolta telefonicamente, contattando un campione significativo di persone così composto:

tipo persone	donne sposate	donne non sposate	uomini sposati	uomini non sposati
numero	≥ 1500	≥ 1200	≥ 1300	≥ 1000

Le telefonate possono avvenire al mattino (con costo operativo per l'azienda di 1 euro/tel.) e alla sera (con costo operativo per l'azienda di 1,60 euro/tel.). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono le seguenti.

chi risponde	mattino	sera
donne sposate	30%	30%
donne non sposate	10%	20%
uomini sposati	10%	30%
uomini non sposati	10%	15%
nessuno	40%	5%

Si vede che le telefonate serali sono più costose ma permettono di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% delle telefonate è a vuoto. Si vuole minimizzare il costo complessivo delle telefonate da effettuare (mattina/sera) in modo da raggiungere un campione significativo di persone.

svolgimento.

Scegliendo come variabili decisionali

- x_1 = numero di telefonate da fare al mattino,
- x_2 = numero di telefonate da fare alla sera,

un possibile modello è il seguente:

$$
\begin{array}{llcrl}
\min & 160\,x_1 + 100\,x_2 & & & \text{costo totale telefonate} \\
 & 0.3\,x_1 + 0.3\,x_2 & \geq & 1500 & \text{donne sposate} \\
 & 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 & \geq & 1200 & \text{donne non sposate} \\
 & 0.1\,x_1 + 0.3\,x_2 & \geq & 1300 & \text{uomini sposati} \\
 & 0.1\,x_1 + 0.15\,x_2 & \geq & 1000 & \text{uomini non sposati} \\
 & x_1,\, x_2 & \geq & 0 & \text{intere}
\end{array}
$$

In pratica, il vincolo di interezza può essere rimosso: se la soluzione ottima del modello di PL così ottenuto non sarà intera sarà sufficiente arrotondare per eccesso i valori ottimi di x_1 ed x_2 per garantire l'ammissibilità con un trascurabile incremento del costo complessivo.

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$. Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere B, sia massima

$$7, 21, 52, 12, 16, 21, 16, 21, 4, 27, 54, 6, 27, 28, 48, 6, 9, 21, 52$$

2.1(1pt) quale è il valore della somma minima? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 24$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimanto.

Questa tipologia di esercizio è ormai standard. Lo lascio come possibile esercizio. Se non sapete come affrontarlo, vedere la correzione di uno degli scritti precedenti dello stesso anno (2007).

I risultati finali sono i seguenti.

B	max sum	quali prendere
30	29	11+8+6+4
24	24	8+6+6+4
26	25	11+6+4+4
21	21	11+6+4

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

-3	13	-41	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-8	15	-1

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il quarto elemento?

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
0	13	- 0	31	15	27	0	5	0	12	0	46	25	59	48	103	76	84	30	60	37	46	41	51	43	58	57
-3	13	-41	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-8	15	-1
32	35	22	63	32	48	63	58	67	55	103	57	-21	78	44	55	0	8	0	30	0	21	12	17	7	15	0
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	103	12	16
include 19-esimo	60	12	20
include ultimo	57	12	27
include quarto	63	4	16

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

34	27	29	24	28	42	49	73	27	46	74	30	53	40	65	67	31	28	24	46	69	35	50	60	32

4.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 30. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica. La riga centrale è la sequenza in input; la riga superiore è stata compilata da destra verso sinistra ed il numero in essa riportato nella generica posizione i rappresenta la massima lunghezza di una sotto-sequenza crescente vincolata a prendere l'elemento i-esimo della sequenza in input come suo primo elemento (dedurne la regola di riempimento); la riga inferiore è stata compilata da sinistra verso destra - a voi il compito di esprimere con chiarezza il significato dei numeri in essa contenuti (e la regola di riempimento).

Decrescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	2	4	1	3	5	6	6	2	5	6	3	5	4	4	4	3	2	1	3	3	2	2	2	1
34	27	29	24	28	42	49	73	27	46	74	30	53	40	65	67	31	28	24	46	69	35	50	60	32
1	2	2	3	3	1	1	1	4	2	1	3	2	3	2	2	4	5	6	3	2	4	3	3	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Decrescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	6	49, 46, 40, 31, 28, 24
N-sequenza	10	34, 29, 28, 27, 74, 53, 40, 31, 28, 24
decrescente con 30	5	73, 46, 30, 28, 24

Dove le motivazioni sono le seguenti:

1 il 6 è il più grande dei valori ottenuti nel riempimento della tabella. Di fatto, per rispondere al primo quesito, bastava compilare solo la riga superiore, oppure solo quella inferiore. Con riferimento alla riga superiore, una sottosequenza decrescente di lunghezza 6 può essere così ricostruita: nella riga superiore cerchio il 6 (numero più grande), quindi cerchio il primo 5 che incontro alla sua destra (che deve esistere per la regola di riempimento) e proseguo sempre verso destra cerchiando 6,5,4,3,2,1 (sulla riga superiore). Gli elementi della riga centrale che corrispondono agli elementi cerchiati nella riga superiore costituiscono la sottosequenza ricercata. Ovviamente la cosa importante non è la rigida regola ma la logica sottostante che vi permette di affrontare un ben più ampio spettro di situazioni.

2 al 30 corrispondono un 3 (nella riga superiore) ed un altro 3 nella riga inferiore. Ora, la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 30 sarà lunga $3 + 3 - 1 = 5$. (Tolgo 1 poichè il 30 viene preso una volta sola: in pratica, oltre all'elemento di valore 30, prendo $3 - 1 = 2$ elementi alla sua sinistra e $3 - 1 = 2$ elementi alla sua destra).

3 una N-sequenza può sempre essere spezzata in due sottosequenze decrescenti dove ciascun elemento della seconda sottosequenza si trova a destra di ciascun elemento della prima sottosequenza. Quindi, con un taglio netto della sequenza in input (ma dove tagliare?), potrei poi cercare una massima sottosequenza decrescente in ciascuna delle 2 metà e ricomporre le sottosequenze così ottenute in una N-sequenza. Come nell'esercizio precedente, per decidere dove tagliare ci si avvale sia dei numeri nella riga superiore che di quelli nella riga inferiore. (Si taglia in modo da massimizzare la somma tra il più grande numero da riga superiore a destra del taglio ed il più grande numero da riga inferiore a sinistra del taglio).

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza oppure la più lunga Z-sequenza (si veda il tema di aprile 2007 per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga A-sequenza.

Problema 5 (14 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(2pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi.

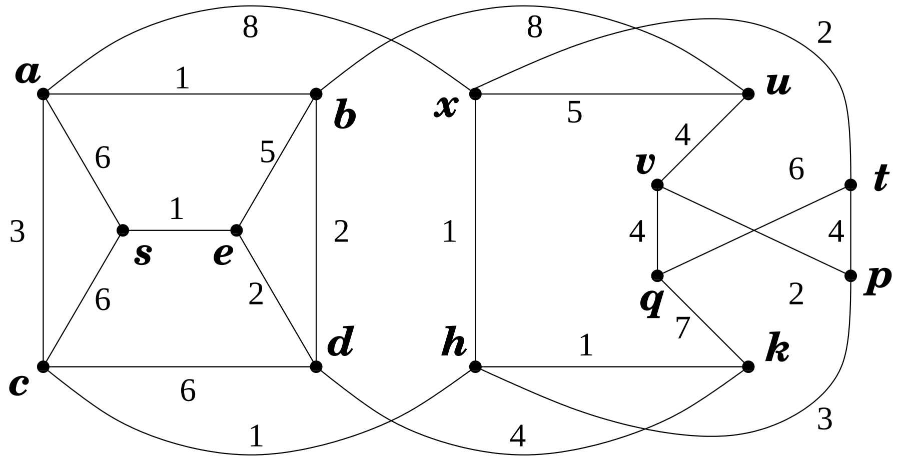
5.2.**(2pt)** Indicare quali archi non siano contenuti in alcun albero dei cammini minimi dal nodo s agli altri nodi.

5.3.**(2pt)** Indicare quali archi siano contenuti in tutti gli alberi di cammini minimi dal nodo s agli altri nodi.

5.4.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi di cammini minimi dal nodo s agli altri nodi. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.5.**(2pt)** Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.

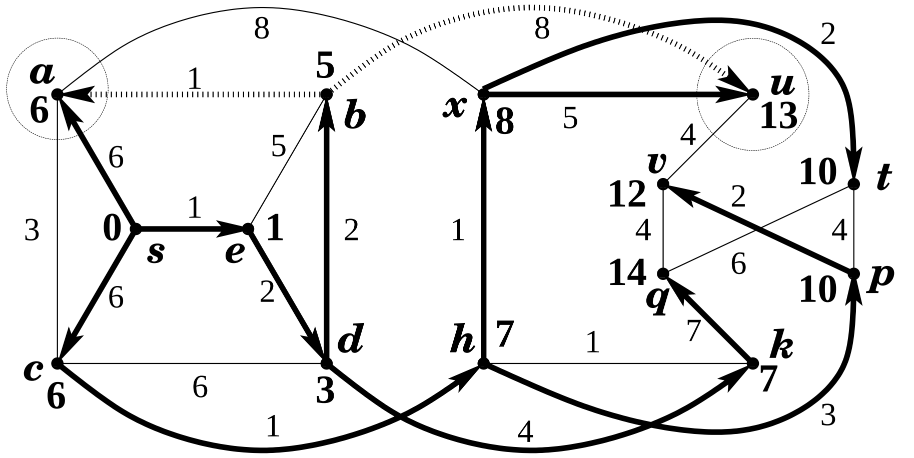
5.6.**(1pt)** Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.



5.7.**(1pt)** Quale è il numero minimo di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.

5.8.**(2pt)** Quale è il numero minimo di archi la cui rimozione rende il grafo planare? Certifica la tua risposta.

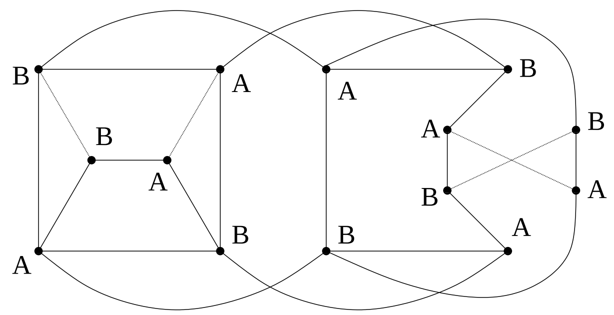
risposte.
La seguente figura esibisce un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi.



Nella figura abbiamo tratteggiato ed orientato (introdotto testa/coda) 2 archi non compresi nell'albero fornito poichè essi hanno la seguente proprietà: se aggiungo la lunghezza dell'arco alla distanza da s del nodo coda ottengo la distanza da s del nodo testa. Questo significa che ciascuno di questi archi tratteggiati potrebbe andare a sostituire, nell'albero dei cammini minimi fornito, l'arco entrante nel suo stesso nodo testa. Quindi, oltre agli archi compresi nella soluzione fornita, anche i 2 archi tratteggiati sono contenuti in qualche albero dei cammini minimi (ossia in qualche soluzione alternativa). Allo stesso tempo, i 2 archi della soluzione fornita che entrano in un nodo cerchiato non sono necessari; tutti gli altri archi della soluzione fornita appartengono invece anche ad ogni altra soluzione. Le possibili soluzioni erano quindi $2^2 = 4$ poichè per ogni nodo cerchiato posso indipendentemente scegliere se tra i 2 archi entranti prendere quello in linea continua oppure quello in linea tratteggiata.

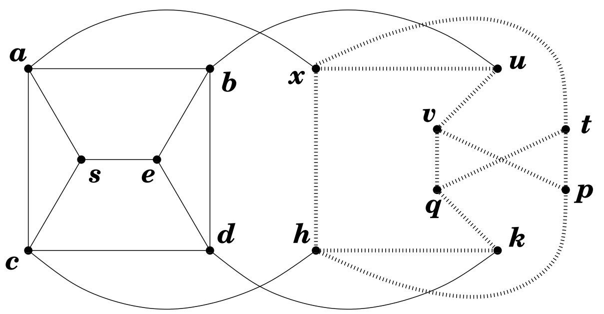
Il grafo non è bipartito poichè contiene circuiti dispari. In particolare, i due triangoli $a-c-s$ e $b-d-e$ ed il pentagono $h-k-q-t-p$ non hanno nodi in comune e quindi, per rendere il grafo bipartito, devo rimuovere almeno 3 nodi. E tuttavia la rimozioni di 3 nodi non basta poicheè nessun nodo appartiene a tutti e quattro i pentagoni $h-k-q-t-p$, $h-k-q-t-p$, $h-k-q-v-p$, $x-u-v-q-t$ e $x-u-v-p-t$.

Le rimozione di 4 nodi è invece sufficiente a rendere il grafo bipartito. In effetti, è possibile rendere il grafo bipartito rimuovendo solamente i 4 archi sa, eb, vp, e qt come dimostrato nella seguente figura.

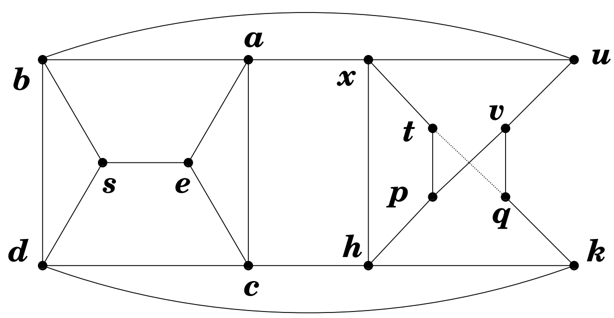


Al tempo stesso, per rendere il grafo bipartito devo rimuovere almeno 2 nodi poicè i 2 triangoli $a-c-s$ e $b-d-e$ non hanno nodi in comune.

Il grafo assegnato non è planare poichè contiene una suddivisione di $K_{3,3}$ come reso evidente in figura.



Tuttavia la rimozione di un solo arco rende il grafo planare.



Problema 6 (6 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max\ 3\,x_1 + 5\,x_2 - 7\,x_3 + 17\,x_4$$
$$\begin{cases} 3\,x_1 & & & & \leq & 19 \\ & 11\,x_2 & & & \leq & 23 \\ & & 13\,x_3 & & \leq & 27 \\ & & & x_4 & \leq & 51 \\ & & & x_4 & \leq & 49 \\ & 11\,x_2 & & & \leq & 25 \\ & 22\,x_2 & & & \leq & 46 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

6.1**(1pt)** Fornire la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$.

6.2**(1pt)** Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto di ciascuno dei 7 vincoli presi separatamente? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a $+\infty$? (Se vi è un limite, specificare quale).

6.3**(1pt)** Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima? Di quanto il secondo?

6.4**(1pt)** Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.

6.5**(1pt)** È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.

6.6**(1pt)** Rimuovere un vincolo in modo che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ individuata al primo punto resti ottima, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari individuino univocamente l'unica soluzione duale gemella.

SOLUZIONE OTTIMA: Questo esercizio è un rafforzamento di un analogo esercizio proposto allo scritto precedente (6 settembre 2007). Suggerisco di provare prima l'esercizio del 6 (eventualmente leggendone la correzione) e poi provare a risolvere questo esercizio, anche autonomamente.

SOLUZIONE OTTIMA: La soluzione ottima è ovviamente $\overline{x}_1 = \frac{19}{3}$, $\overline{x}_2 = \frac{23}{11}$, $\overline{x}_3 = 0$ (poichè il coefficiente della x_3 nella funzione obiettivo e negativo), $\overline{x}_4 = 49$.

PREZZI OMBRA: I prezzi ombra sono ovviamente $\lambda_1 = \frac{3}{3} = 1$, $\lambda_2 = \lambda_7 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = \frac{17}{1} = 17$, e $\lambda_6 = 0$. Si noti tuttavia che non sarebbe di alcuna utilità portare il termine noto del quinto vincolo oltre il valore 51, dacchè a quel punto subentrerebbe il quarto vincolo a vanificare il senso dei miei acquisti. Per tutte le altre variabili, i prezzi ombra risultano equi per un qualsiasi incremento dei termini noti dei vincoli. (Si assume che i termini noti dei vincoli siano comunque matenuti non negativi poiché in caso contrario si ha la perdita dell'ammissibilitá in quanto si entra in contraddizione con i vincoli di non negativitá).

Robustezza soluzione ottima: Al variare dei coefficienti della funzione obiettivo, la soluzione $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ resta ottima fintantochè per nessuno dei coefficienti della funzione obiettivo il segno (positivo/segativo) risulta invertito.

Considerazioni sul duale: Si noti che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = \left(\frac{19}{3}, \frac{23}{11}, 0, 49\right)$ è degenere in quanto soddisfa ad uguaglianza due vincoli ridondanti (linearmente dipendenti): $11\, x_2 \leq 23$ e $22\, x_2 \leq 46$. Ne consegue che i prezzi ombra non costituiscono una soluzione duale ammissibile. Resta comunque agevole reperire una soluzione duale ammissibile e gemella della soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ semplicemente ignorando il vincolo $22\, x_2 \leq 46$, e valutando che in assenza di tale vincolo allora il prezzo ombra che sarei disposto a pagare sul vincolo $11\, x_2 \leq 23$ sarebbe $\hat{\lambda}_2 = \frac{5}{11}$. A questo punto, $\left(\lambda_1, \hat{\lambda}_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \right)$ è la soluzione duale gemella ricercata, la cui esistenza era per altro garantita dal teorema della dualità forte. La soluzione duale gemella prodotta sopra è di base, ed un'altra soluzione duale gemella di base poteva essere ottenuta ignorando invece il vincolo $11\, x_2 \leq 46$, e pervenendo al valore $\hat{\lambda}_7 = \frac{5}{22}$. A questo punto, $\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \hat{\lambda}_7, \right)$ è l'ulteriore soluzione duale gemella di base sopra promessa. Di fatto, le soluzioni duali gemelle sono tutti e soli i punti del segmento che congiunge le due soluzioni duali gemelle di base sopra esibite.

Rimozione Vincolo: Non appena si rimuova effettivamente uno dei due vincoli ridondanti (il secondo e il settimo), la soluzione primale ottima non sarà più degenere pur conservando l'ottimalità (il problema non cambia con la rimozione di uno solo dei vincoli ridondanti). A questo punto la soluzione duale che dimostra l'ottimalità della soluzione primale diventa unica.

Come esercizio, si verifichi con mano in questo caso specifico quanto qui detto in astratto ed a valenza generale.