Esame di Ricerca Operativa - 30 marzo 2006
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (7 punti): La CONFEDERAZIONE MERIDIONALE DEL KIBBUTZIM è un gruppo di tre kibbutzim (comunità agricole municipali) in Israele. La pianificazione completa per questo gruppo è svolta dal competente Ministero che sta pianificando la produzione agricola per l'anno futuro.

Il rendimento agricolo di ogni kibbutz è limitato sia dalla quantità di terra irrigabile disponibile, sia dalla quantità di acqua destinata all'irrigazione. Questi dati sono riportati nella seguente tabella.

Risorse dei dati per la Confederazione Meridionale del Kibbutzim		
Kibbutz	**Terra usabile (acri)**	**Allocazione di acqua (acro-piede)**
1	400	600
2	600	800
3	300	375

I raccolti possibili per questa regione comprendono barbabietole da zucchero, cotone e sorgo, e questi sono i tre prodotti che vengono considerati per la stagione futura. Questi raccolti differiscono principalmente per il guadagno netto atteso per acro e per il consumo di acqua. Inoltre, il Ministro dell'Agricoltura ha fissato una quota massima per il numero totale di acri che possono essere destinati a questi raccolti della Confederazione Meridionale del Kibbutzim, come mostrato nella seguente tabella.

Dati del raccolto per la Confederazione Meridionale del Kibbutzim			
Raccolto	**Quota Massima (acri)**	**Consumo di acqua (acro-piede/acro)**	**Guadagno netto (dollaro/acro)**
Barbabietole da zucchero	600	3	1000
Cotone	500	2	750
Sorgo	325	1	250

A causa della limitata disponibilità di acqua per l'irrigazione, la Confederazione Meridionale del Kibbutzim non è in grado di utilizzare tutte le sue terre irrigabili nella stagione futura. Per garantire equità tra i tre kibbutzim, è stato stabilito che ogni kibbutz potrà usare la stessa proporzione della propria terra irrigabile. Per esempio, se il kibbutz 1 pianta 200 dei suoi 400 acri disponibili, allora il kibbutz 2 deve piantare 300 dei suoi 600 acri, mentre il kibbutz 3 pianta 150 dei suoi 300 acri. Tuttavia, in ogni kibbutz può essere fatta crescere una qualunque combinazione di raccolti.

Il problema che si vuole risolvere è quello di pianificare quanti acri destinare ad ogni raccolto nel rispettivo kibbutz, soddisfacendo simultaneamente le specifiche restrizioni. L'obiettivo è massimizzare il guadagno totale netto della Confederazione Meridionale del Kibbutzim nel suo complesso.

svolgimento. Questo stesso esercizio viene proposto e svolto nel vostro libro di testo (Hillier e Lieberman) a pagina 43. Il primo passo per una formulazione come problema di

PL consiste nell'introdurre 9 variabili di decisione come da seguente tabella.

Variabili di decisione			
Raccolto	**1**	**Allocazione (acri) kibbutz** **2**	**3**
Barbabietole da zucchero	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$
Cotone	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$
Sorgo	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$

Dove la variabile $x_{i,j}$ indica la quantitá di acri del kibbutz j da destinarsi alla coltivazione di tipologia i (barbabietole (1), oppure cotone (2), oppure sorgo (3)).

L'obiettivo é quello di massimizzare il guadagno totale netto Z

$$\max Z = 1000\,(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3}) + 750\,(x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3}) + 250\,(x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3})$$

soggetto ai seguenti vincoli:

acri totali per ogni raccolto

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 600, \qquad x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 500, \qquad x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \leq 325$$

terra utilizzabile da ciascun kibbutz

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} \leq 400, \qquad x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} \leq 600, \qquad x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} \leq 300$$

allocazione di acqua per ogni kibbutz

$$3\,x_{1,1} + 2\,x_{2,1} + x_{3,1} \leq 600, \qquad 3\,x_{1,2} + 2\,x_{2,2} + x_{3,2} \leq 800, \qquad 3\,x_{1,3} + 2\,x_{2,3} + x_{3,3} \leq 375$$

rispetto proporzione terre coltivate

$$\frac{x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1}}{400} = \frac{x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2}}{600} = \frac{x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}}{300}$$

non negativitá $x_{i,j} \geq 0$ per ogni $i, j = 1, 2, 3$.

Il rispetto della proporzione delle terre coltivate puó essere espresso tramite due soli vincoli di uguaglianza indipendenti:

$$3\,(x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1}) = 2\,(x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2}), \qquad (x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2}) = 2\,(x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3})\,.$$

A questo punto due dei tre vincoli sulla terra utilizzabile da ciascun kibbutz diventano ridondanti e, volendo, possono essere rimossi.

Problema 2 (12 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max\ 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 + \ 3\,x_2 + \ \ \ x_3 \leq \ 5 \\ 4\,x_1 + \ \ \ x_2 + \ 2\,x_3 \leq 11 \\ 3\,x_1 + \ 4\,x_2 + \ 2\,x_3 \leq \ 8 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.1 Risolvere con il metodo del simplesso.

2.2 Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto nel primo, secondo, o terzo vincolo?

2.3 E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per il primo vincolo? (si considerino sia incrementi che decrementi, ossia $5 \mapsto 5 + \delta$, δ nei numeri reali)

2.4 Di quanto dovremmo alterare il secondo coefficiente nella funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima? (si considerino sia incrementi che decrementi, ossia $4 \mapsto 4 + \delta$, δ nei numeri reali)

2.1 Risoluzione con il metodo del simplesso:
Il problema è in forma canonica e pertanto gli corrisponde il primo dei seguenti tre tableau. Il problema è ad origine ammissibile e pertanto impiego il metodo del simplesso primale per giungere al tableau ottimo.

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ w_1 & \boxed{2} & 3 & 1 & 5 \\ w_2 & 4 & 1 & 2 & 11 \\ w_3 & 3 & 4 & 2 & 8 \\ z & -5 & -4 & -3 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & w_1 & x_2 & x_3 & \\ x_1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ w_2 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ w_3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \\ z & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{25}{2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & w_1 & x_2 & w_3 & \\ x_1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ w_2 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ x_3 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ z & 1 & 3 & 1 & 13 \end{array}$$

Pertanto la soluzione ottima è $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Ad essa corrisponde un valore di 13 della funzione obiettivo.

2.2 I valori delle variabili duali (prezzi ombra) sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e $\lambda_3 = 1$. Pertanto:

- per ogni unità di incremento nel termine noto del primo vincolo sono disposto a pagare massimo 1.
- almeno per piccole variazioni, sono indifferente ad ogni incremento o decremento nel termine noto del secondo vincolo.
- per ogni unità di incremento nel termine noto del terzo vincolo sono disposto a pagare massimo 1.

Si noti come una rapida verifica dell'ammissibilitá delle soluzioni primale ($x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$) e duale ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$) consentirebbe a questo punto di assicurarsi della correttezza dei risultati fin qui prodotti.

2.3 Tuttavia questa indicazione vale solo per piccoli incrementi. Per scoprire fino a quali entità di incremento tali valori ombra restano indicativi passiamo a considerare il duale. Il tableau del duale all'ottimo può essere ottenuto dal tableau primale all'ottimo come segue:

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\text{Tableau Primale}} \\ & w_1 & x_2 & w_3 & \\ x_1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ w_2 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ x_3 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ z & 1 & 3 & 1 & 13 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\text{Tableau Duale}} \\ & y_1 & \lambda_2 & y_3 & \\ \lambda_1 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ y_2 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ \lambda_3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ z & -2 & -1 & -1 & 13 \end{array}$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale é che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è l'ultima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della PROVA DI CONTROLLO (prova del nove) della PL.

$$\begin{array}{cccccc} & & (0) & (11) & (0) & \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & & y_1 & \lambda_2 & y_3 & \\ (5+D) \rightarrow & \lambda_1 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ (0) \rightarrow & y_2 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ (8) \rightarrow & \lambda_3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & z & -2 & -1 & -1 & 13 \end{array}$$

Ricordiamo che per ogni colonna vale quanto segue: il valore dell'ultimo elemento della colonna si ottiene sommando gli altri elementi della colonna ciascuno moltiplicato per il coefficiente della riga cui appartiene e sottraendo infine il valore del coefficiente associato alla colonna.

Colonna 1: $-2(5+D) - 2(0) + 1(8) - (0) = -2 - 2D$
Colonna 2: $2(5+D) + 5(0) + 0(8) - (11) = -1 + 2D$
Colonna 3: $3(5+D) + 1(0) - 2(8) - (0) = -1 + 3D$
Colonna 4: $1(5+D) + 3(0) + 1(8) = 13 + D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-2(1+D) \quad -1+2D \quad -1+3D \quad 13+D$$

Si noti come, ponendo $D = 0$, si ritrovi in effetti la corrispondente riga z del tableau duale di cui sopra. Quindi abbiamo implicitamente condotto la prova di controllo relativamente a quel tableau. L'esito di tale verifica é stato positivo e quindi possiamo concludere sia per la correttezza dei singoli coefficienti dei tableau fin qui prodotti sia per la congruitá con cui la prova di controllo é stata condotta.

Tornando al nostro obiettivo, si noti che i primi tre termini di tale riga rimangono tutti non positivi se e solo se $-1 \leq D \leq \frac{1}{3}$. Il tableau considerato resta pertanto ottimo se e solo se $-1 \leq D \leq \frac{1}{3}$. Possiamo concludere che il quantitativo di diponibilità sul primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 1 per ogni unità di incremento é al piú $\frac{1}{3}$. Inoltre, in caso di liquidazione di tale disponibilitá, il prezzo a cui vendere sarebbe 1 solo per la prima unitá venduta ma dovrebbe poi essere rivisto verso l'alto.

2.4 Nel analizzare la sensitività della soluzione ottima rispetto a modifiche dei coefficienti della funzine obiettivo conviene invece riferirsi al primale.

$$
\begin{array}{rcrrrr}
 & & (0) & (4+D) & (0) & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & w_1 & x_2 & w_3 & \\
(5) \rightarrow & x_1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\
(0) \rightarrow & w_2 & -2 & -5 & 0 & 1 \\
(3) \rightarrow & x_3 & -3 & -1 & 2 & 1 \\
 & z & 1 & 3 & 1 & 13
\end{array}
$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $2(5) - 2(0) - 3(3) - (0) = 1$
Colonna 2: $2(5) - 5(0) - 1(3) - (4 + D) = 3 - D$
Colonna 3: $-1(5) + 0(0) + 2(3) - (0) = 1$
Colonna 4: $2(5) + (0) + (3) = 13$

Pertanto la riga prodotta è:

$$1 \quad 3 - D \quad 1 \quad 13$$

Siccome il tableau resta ottimo per ogni $D \leq 3$, la soluzione considerata ($x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.) resta ottima fintantochè $D \leq 3$, e smette di essere ottima quando l'incremento D sul secondo coefficiente della funzione obiettivo supera 3.

Problema 3 (9 punti): Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

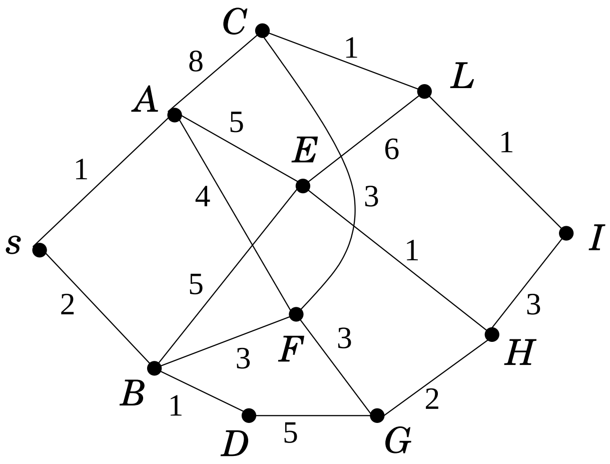
3.1 Trovare l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo s.

3.2 Indicare quali archi siano contenuti in ogni soluzione ottima, ossia quali archi non possano essere rimossi senza allungare almeno un cammino da s ad un qualche altro nodo.

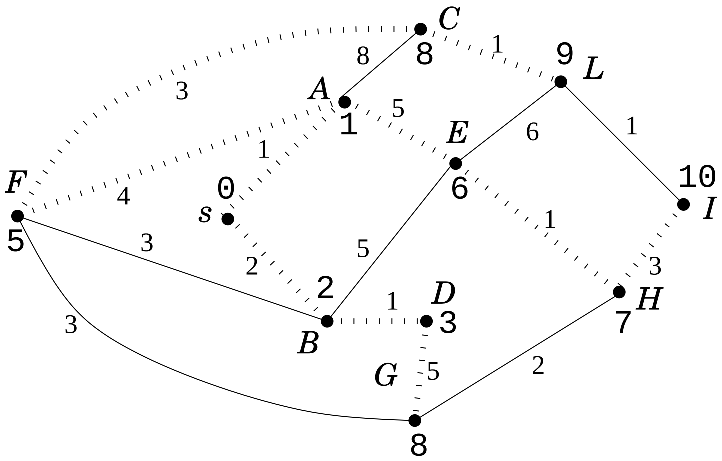
3.3 Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.

3.4 Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.

risposte.



3.1 L'albero dei cammini minimi puó essere reperito tramite l'algoritmo di Dijkstra, e resta indicato nella seguente figura dove il grafo é stato convenientemente ridisegnato mettendone in evidenza la planaritá.



3.2 Nell'albero dei cammini minimi fornito in figura, l'arco HI puó essere sostituito dall'arco LI, mentre l'arco AF puó essere sostituito dall'arco BF, e l'arco DG puó essere sostituito dall'arco FG. Gli archi che sono necessariamente contenuti in ogni albero dei cammini minimi sono: sA, sB, BD, AE, EH, FC, CL.

3.3 Il grafo assegnato non é bipartito visto che esso contiene un ciclo dispari, e piú precisamente il triangolo ACF.

3.4 Il grafo assegnato é planare, come messo in evidenza dall'embedding planare fornitone in figura.

Problema 4 (3 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$
\max \; 3\,x_1 - 7\,x_2
$$
$$
\begin{cases}
4\,x_1 + 5\,x_2 \geq 2 \\
6\,x_1 - 6\,x_2 = 7 \\
x_1 + 8\,x_2 \leq 20 \\
x_1 \geq 0
\end{cases}
$$

4.1 Scrivere il problema duale.

4.2 Porre il problema primale in forma standard.

risposte.

4.1 Scrivere il problema duale.

$$
\min \; 2\,\lambda_1 + 7\,\lambda_2 + 20\,\lambda_3
$$
$$
\begin{cases}
4\,\lambda_1 + 6\,\lambda_2 + \lambda_3 \geq 3 \\
5\,\lambda_1 - 6\,\lambda_2 + 8\,\lambda_3 = -7 \\
\lambda_1 \leq 0, \quad \lambda_3 \geq 0
\end{cases}
$$

4.2 Porre il problema primale in forma standard.

$$
\max \; 3\,x_1 - 7\,x_2' + 7\,x_2''
$$
$$
\begin{cases}
-4\,x_1 - 5\,x_2' + 5\,x_2'' \leq -2 \\
6\,x_1 - 6\,x_2' + 6\,x_2'' \leq 7 \\
-6\,x_1 + 6\,x_2' - 6\,x_2'' \leq -7 \\
x_1 + 8\,x_2' - 8\,x_2'' \leq 20 \\
x_1,\, x_2',\, x_2'' \geq 0
\end{cases}
$$