Esame di Ricerca Operativa - 7 marzo 2006
Facoltà di Ingegneria - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1: Si consideri la soluzione $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = 0$ del seguente problema.

$$\max\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 12 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Verificare esplicitamente[1] che la soluzione proposta è ammissibile. Utilizzare gli scarti complementari per verificarne o confutarne l'ottimalità. La soluzione assegnata è ottima?

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} 5(3) - 2(3) + (0) = \mathbf{9} \leq 9 \\ (3) + 3(3) - (0) = \mathbf{12} \leq 12 \\ 4(3) + 5(3) = 27 \leq 30 \\ (3) + (3) = 6 \leq 150 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 9y_1 + 12y_2 + 30y_3 + 150y_4$$
$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 + 4y_3 + y_4 \geq 4 \\ -2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4 \geq 5 \\ y_1 \geq -3 \\ - y_2 \geq -8 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_3 = y_4 = 0$ poichè gli ultimi due vincoli del primale non sono soddisfatti ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2 > 0$, i primi due vincoli del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 = 4 \\ -2y_1 + 3y_2 = 5 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata. Essa è data da $y_1 = \frac{7}{17}$, $y_2 = \frac{33}{17}$, $y_3 = y_4 = 0$ ed è una soluzione ammissibile (essa è anche di base). L'ammissibilità segue dal fatto che tutte le variabili assumono valore non negativo ed inoltre $y_1 \geq -3$ e $-y_2 \geq -8$ risultano soddisfatte. In conclusione, la soluzione primale assegnata è ottima in quanto ho reperito una soluzione ammissibile per il duale che soddisfa gli scarti complementari. Per la dualità forte, le due soluzioni hanno lo stesso valore. Infatti,

$$4(x_1 \mapsto 3) + 5(x_2 \mapsto 3) - 3(x_3 \mapsto 0) - 8(x_4 \mapsto 0) = 12 + 15 = 27\,,$$

[1] In questo caso, se scorgi e sai motivare delle semplificazioni, valuto che ciò possa essere meritorio.

come anche

$$9\left(y_1 \mapsto \frac{7}{17}\right) + 12\left(y_2 \mapsto \frac{33}{17}\right) + 30(y_3 \mapsto 0) + 150(y_4 \mapsto 0) = \frac{63}{17} + \frac{396}{17} = \frac{459}{17} = 27\,.$$

Pertanto, la soluzione primale assegnata e la soluzione duale reperita tramite gli scarti complementari si certificano reciprocamente l'ottimalità.

Problema 2: Stabilire la veridicità delle seguenti affermazioni:

Se un problema di PL in forma standard ha una soluzione ottima non di base allora tale problema

1. *È necessariamente ammissibile.*
2. *È necessariamente degenere ossia ha almeno una soluzione di base degenere.*
3. *Può essere illimitato.*
4. *Ha un duale che è necessariamente ammissibile.*
5. *Ha un duale che è necessariamente limitato.*
6. *Ha sicuramente un duale.*
7. *Ha almeno una soluzione di base ottima.*
8. *Ha almeno due soluzioni di base ottime.*

Ti è richiesto di argomentare le tue risposte. Nell'argomentarle puoi fare riferimento ad enunciati noti, ove positive, oppure devi proporre controesempi, ove negative. Non è necessario rispondere a tutte le domande: sono indipendenti, e non ti conviene azzardare risposte (penalità per le eresie).

risposte.

1. È necessariamente ammissibile. VERO - ogni soluzione ottima è anche ammissibile.
2. È necessariamente degenere ossia ha almeno una soluzione di base degenere. FALSO - si consideri il problema $\max\{x_1 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$.
3. Può essere illimitato. FALSO - ha una soluzione ottima.
4. Ha un duale che è necessariamente ammissibile. VERO - per il teorema della dualità forte. Se il duale fosse inammissibile il primale potrebbe essere solamente inammissibile od illimitato.
5. Ha un duale che è necessariamente limitato. VERO - basta il teorema della dualità debole.

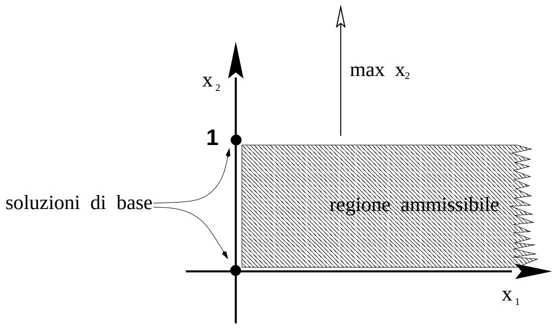
6. Ha sicuramente un duale. VERO - ogni problema di PL lo ha.

7. Ha almeno una soluzione di base ottima. VERO - segue dal teorema fondamentale della PL. In pratica, è una conseguenza dell'algoritmo del simplesso.

8. Ha almeno due soluzioni di base ottime. FALSO - un controesempio è dato dal seguente problema in forma standard.

$$\max \ x_2 \\ \begin{cases} x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Esso presenta un'unica soluzione di base ottima nonostante ammetta soluzioni ottime non di base.



Problema 3:

$$\max \ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Risolvere[2].
- Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto nel primo o secondo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo?
- Di quanto dovremmo alterare ciascun coefficiente nella funzione obiettivo (singolarmente) affinchè la soluzione non sia più ottima?

OSSERVAZIONE PRELIMINARE:
La variabile x_3 non è coinvolta in nessun vincolo, a parte il fatto che essa è assunta essere non negativa. Inoltre la x_3 appare con un coefficiente negativo nella funzione obiettivo che è

[2]In questo caso, se scorgi e sai motivare delle semplificazioni puoi risparmiare del lavoro a tuo vantaggio.

richiesto massimizzare. Ciò implica che la x_3 sarà posta uguale a 0 in ogni soluzione ottima. Ed il problema si semplifica nel seguente problema in 2 sole variabili.

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \ \leq \ 1 \\ -x_1 \ + x_2 \ \leq \ 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Risoluzione Grafica:

Rappresentiamo in figura lo spazio delle soluzioni ammissibili, il gradiente della funzione obiettivo e la soluzione ottima.

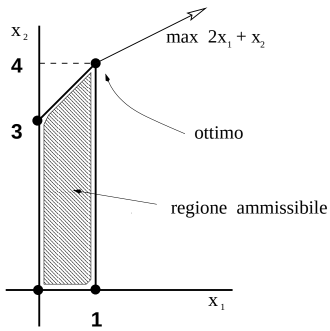


Figura 1: regione ammissibile e soluzione ottima.

Risoluzione Algebrica:

Il problema è in forma canonica e pertanto gli corrisponde il primo dei seguenti tre tableau. Il problema è ad origine ammissibile e pertanto impiego il metodo del simplesso primale per giungere al tableau ottimo.

$$\begin{array}{rrrr} & x_1 & x_2 & \\ w_1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ w_2 & -1 & 1 & 3 \\ z & -2 & -1 & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrrr} & w_1 & x_2 & \\ x_1 & 1 & 0 & 1 \\ w_2 & 1 & \boxed{1} & 4 \\ z & 2 & -1 & 2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrrr} & w_1 & w_2 & \\ x_1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 4 \\ z & 3 & 1 & 6 \end{array}$$

Pertanto la soluzione ottima è $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Ad essa corrisponde un valore di 6 della funzione obiettivo.

I valori delle variabili duali (prezzi ombra) sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Pertanto:

- per ogni unità di incremento nel termine noto del primo vincolo sono disposto a pagare al massimo 3.
- per ogni unità di incremento nel termine noto del secondo vincolo sono disposto a pagare al massimo 1.

Tuttavia questa indicazione vale solo per piccoli incrementi. Per scoprire fino a quali entità di incremento tali valori restano validi passiamo a considerare il duale. Il tableau del duale all'ottimo può essere ottenuto dal tableau primale all'ottimo come segue:

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\text{TABLEAU PRIMALE}} \\
 & w_1 & w_2 & \\
x_1 & 1 & 0 & 1 \\
x_2 & 1 & 1 & 4 \\
z & 3 & 1 & 6
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\text{TABLEAU DUALE}} \\
 & y_1 & y_2 & \\
\lambda_1 & -1 & -1 & 3 \\
\lambda_2 & 0 & -1 & 1 \\
z & -1 & -4 & 6
\end{array}
$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale é che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è l'ultima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della PROVA DI CONTROLLO (prova del nove) della PL.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & (0) & (0) & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & y_1 & y_2 & \\
(1+D) \rightarrow & \lambda_1 & -1 & -1 & 3 \\
(3) \rightarrow & \lambda_2 & 0 & -1 & 1 \\
 & z & -1 & -4 & 6
\end{array}
$$

Ricordiamo che per ogni colonna vale quanto segue: il valore dell'ultimo elemento della colonna si ottiene sommando gli altri elementi della colonna ciascuno moltiplicato per il coefficiente della riga cui appartiene e sottraendo infine il valore del coefficiente associato alla colonna.

Colonna 1: $-1(1+D)+0(3)-(0)=-1-D$
Colonna 2: $-1(1+D)-1(3)-(0)=-4-D$
Colonna 3: $3(1+D)+1(3)=6+3D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-(1+D) \quad -(4+D) \quad (6+3D)$$

Siccome il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -1$ concludo che non vi sono limitazioni nel quantitativo di diponibilità del primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 3 per ogni unità di incremento.

Consideriamo ora il secondo vincolo:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & (0) & (0) & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & y_1 & y_2 & \\
(1) \rightarrow & \lambda_1 & -1 & -1 & 3 \\
(3+D) \rightarrow & \lambda_2 & 0 & -1 & 1 \\
 & z & -1 & -4 & 6
\end{array}
$$

Colonna 1: $-1(1)+0(3+D)-(0)=-1$
Colonna 2: $-1(1)-1(3+D)-(0)=-4-D$

Colonna 3: $3(1) + 1(3 + D) = 6 + D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-1 \quad -(4 + D) \quad (6 + D)$$

Siccome il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -4$ concludo che non vi sono limitazioni nel quantitativo di diponibilità del secondo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 1 per ogni unità di incremento.

Nel analizzare la sensitività della soluzione ottima rispetto a modifiche dei coefficienti della funzine obiettivo conviene invece riferirsi al primale.

$$\begin{array}{rcccc} & & (0) & (0) & \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ & & w_1 & w_2 & \\ (2+D) \rightarrow & x_1 & 1 & 0 & 1 \\ (1) \rightarrow & x_2 & 1 & 1 & 4 \\ & z & 3 & 1 & 6 \end{array}$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $1(2 + D) + 1(1) - (0) = 3 + D$
Colonna 2: $0(2 + D) + 1(1) - (0) = 1$
Colonna 3: $1(2 + D) + 4(1) = 6 + D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$(3 + D) \quad 1 \quad (6 + D)$$

Siccome il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -3$ concludo che la soluzione proposta ($x_1 = 1$, $x_2 = 4$.) resta ottima fintantochè $D \geq -3$.

Consideriamo ora il secondo coefficiente della funzione obiettivo.

$$\begin{array}{rcccc} & & (0) & (0) & \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ & & w_1 & w_2 & \\ (2) \rightarrow & x_1 & 1 & 0 & 1 \\ (1+D) \rightarrow & x_2 & 1 & 1 & 4 \\ & z & 3 & 1 & 6 \end{array}$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $1(2) + 1(1 + D) - (0) = 3 + D$
Colonna 2: $0(2) + 1(1 + D) - (0) = 1 + D$
Colonna 3: $1(2) + 4(1 + D) = 6 + 4D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$(3 + D) \quad (1 + D) \quad (6 + 4D)$$

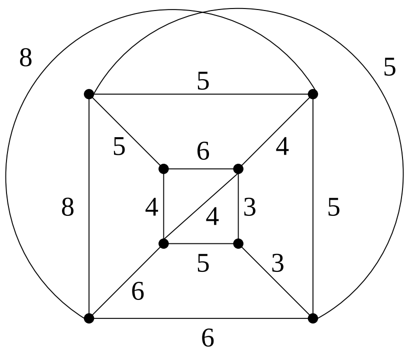
Siccome il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -1$ concludo che la soluzione proposta ($x_1 = 1$, $x_2 = 4$.) resta ottima fintantochè $D \geq -1$.

Infine, per quanto riguarda la variabile x_3, poichè essa è non negativa e non appare in alcun vincolo, essa dovra‘ avere valore 0 in ogni soluzione ottima fintantochè il suo coefficiente nella funzione obiettivo è negativo. Ove questo coefficiente dovesse divenire positivo, il problema diviene illimitato. Ove tale coefficiente fosse nullo, resta invece valida l'analisi di cui sopra solo che ogni soluzione ammissibile (e ottima) di cui sopra va corredata con un qualsiasi valore non negativo della x_3 per ottenere una specifica soluzione ammissibile (e ottima). Pertanto, in questo caso le soluzioni ottime sono infinite ed una sola di esse è di base. Tale soluzione di base corrisponde alla soluzione di base ottima per il problema studiato sopra ed è corredata dal valore $x_3 = 0$.

Risulta inoltre istruttivo rappresentare le due funzioni obiettivo estremali ($z = -x_1 + x_2$ e $z = 2x_1$) nel piano cartesiano. L'analisi di sensitività poteva anch'essa essere condotta per via geometrica. Come esercizio aggiuntivo propongo di analizzare modifiche congiunte nei due coefficienti ossia:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & (0) & (0) & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & w_1 & w_2 & \\
(2 + D_1) \rightarrow & x_1 & 1 & 0 & 1 \\
(1 + D_2) \rightarrow & x_2 & 1 & 1 & 4 \\
 & z & 3 & 1 & 6
\end{array}
$$

Problema 4: Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1. Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

4.2. Indicare quali archi siano contenuti in ogni soluzione ottima, ossia quali archi non possano essere rimossi senza peggiorare la qualità della soluzione ottima.

4.3. Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo.

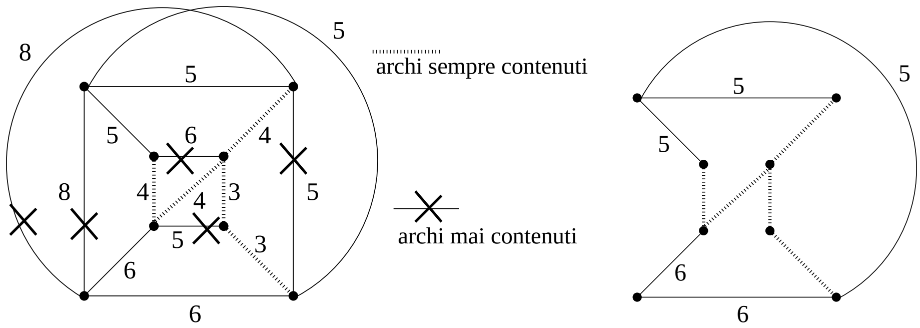
4.4. Il grafo rappresentato in figura ammette un ciclo Euleriano? Fornisci un certificato per la tua risposta.

4.5. Il grafo rappresentato in figura ammette un cammino Euleriano? Fornisci un certificato per la tua risposta.

4.6. Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.

risposte.

Gli archi contenuti in ogni soluzione ottima sono indicati nella seguente figura. La figura specifica inoltre quegli archi che non appartengono ad alcuna soluzione ottima.



Gli alberi di peso minimo sono 6 e vengono ottenuti aggiungendo agli archi contenuti in ogni soluzione ottima uno qualsiasi dei 3 archi di peso 5 contenuti in qualche soluzione ottima più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 contenuti in qualche soluzione ottima, come illustrati nel disegno di destra. Le due scelte (uno tra i tre di peso 5 ed uno tra i due di peso 6) sono indipendenti.

Il grafo assegnato non ammette un ciclo Euleriano poichè nel centro vi sono due nodi di grado dispari. Esso ammette invece un cammino Euleriano in quanto è connesso e tutti i nodi, eccetto due di essi, hanno grado pari.

Il grafo assegnato non è planare poichè contiene una suddivisione di K_5 (grafo completo su 5 nodi, che non è planare) come evidenziato nella seguente figura.