

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

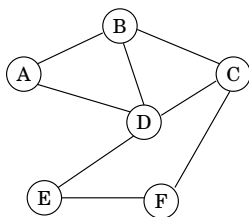
Esame di Ricerca Operativa - 28 giugno 2010 Facoltà di Ingegneria - Udine

Problema 1 (2+2 punti):

Un MATCHING in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M . Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e , allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.



	<i>AB</i>	<i>AD</i>	<i>BC</i>	<i>BD</i>	<i>CD</i>	<i>CF</i>	<i>DE</i>	<i>EF</i>
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

Problema 2 (4 punti):

La rete idrica del basso Tagliamento deve soddisfare il fabbisogno di tre centri abitati che richiedono giornalmente la seguente quantità d'acqua (in Gigalitri):

Flaibano	Sedegliano	Codroipo
50	80	290

I tre centri possono essere riforniti da due sorgenti S_1 e S_2 , aventi capacità giornaliera di 160 e 310 Gl rispettivamente. Trasportare acqua da una sorgente a un centro comporta le perdite indicate nella seguente tabella (hl/Gl)

	Flaibano	Sedegliano	Codroipo
S_1	10	15	20
S_2	8	14	7

Formulare come PL il problema di pianificare il trasporto d'acqua ai tre centri abitati minimizzando le perdite. Si tenga presente che l'acquedotto dalla sorgente S_1 verso Codroipo porta massimo 150 Gl al giorno.

Problema 3 (4 punti):

Un robot R deve portarsi dalla cella A-1 alla sua home H nella cella G-8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	•	.
B	.	.	.	•	•	.	.	.
C
D	.	•	.	.	.	•	.	.
E	.	.	.	•
F
G	.	.	.	•	.	.	.	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B-3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

2.4 (1pt) partenza in A-1 ed arrivo in G-8, al robot viene richiesto di passare per D-5.

consegna	numero percorsi
A-1 → G-8	
B-3 → G-8	
A-1 → F-6	
passaggio per D-5	

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = CCACAGAGGCTACCACG$ e $t = ACGCAGTCAGGAACGC$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t .

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t ?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'G'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = CAGGAACGC$ di t ?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = CTACCACG$ di s ?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'G'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

Problema 5 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

15	8	10	5	9	25	32	56	8	29	57	12	35	23	50	52	13	11	6	29	54	17	34	46	18
----	---	----	---	---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 13. Specificare quanto è lunga e fornirla.

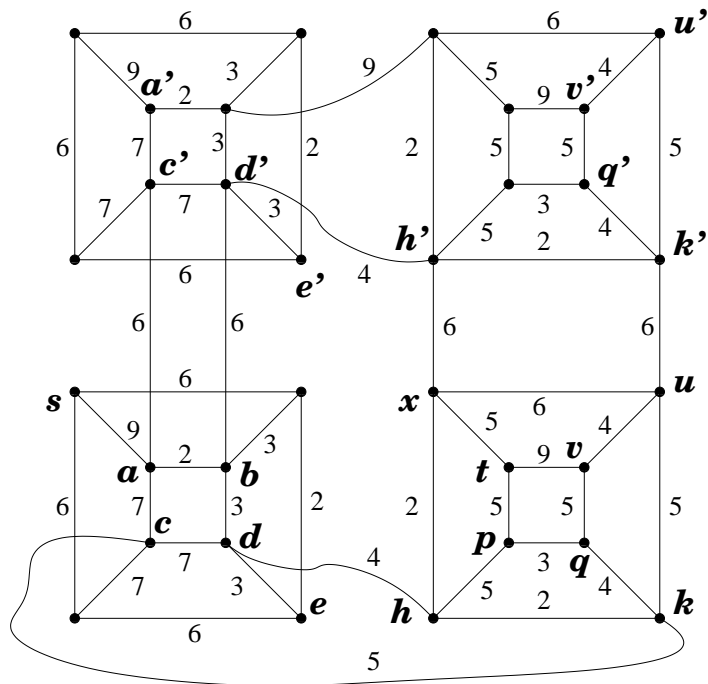
tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
Z-sequenza		
crescente con 13		

Problema 6 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_5 = x_6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 7$, $x_4 = 5$ del seguente problema.

$$\begin{cases} \max & x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 11x_4 + C_5x_5 + C_6x_6 \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \leq 18 \\ & x_4 + x_5 & \leq 5 \\ & x_3 + x_6 & \leq 7 \\ x_1 + x_3 + x_5 & \leq 10 \\ & x_2 + x_4 + x_6 & \leq \frac{15}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

- 1.1.(1pt) Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.
- 1.2.(1pt) Scrivere il problema duale.
- 1.3.(1pt) Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.
- 1.4.(1pt) Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.
- 1.5.(2pt) Per quali valori dei parametri C_5 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.



Problema 7 (14 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.
- 5.2.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco $h'x$ con un arco $q'x$ è planare oppure no.
- 5.3.(1+1pt) Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s . Esprimere la famiglia di tali alberi.
- 5.4.(2pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.5.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.6.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.7.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(1+1pt) Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q .