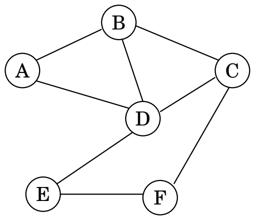
Esame di Ricerca Operativa - 9 febbraio 2010
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (2+2 punti):

Un Insieme Indipendente in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme $X \subseteq V$ tale che per ogni due nodi $x_1, x_2 \in X$ non vi è in G alcun arco $x_1 x_2$. Quando ad ogni nodo v è associato un valore w_v, allora il valore di $X \subseteq V$ è espresso da $val(X) := \sum_{v \in X} w_v$.

Ad esempio, con riferimento al grafo G in figura, gli insiemi $\{A, C, E\}$ e $\{B, F\}$ sono due possibili Insiemi Indipendenti entrambi di valore 7.



	A	B	C	D	E	F
Valore	2	3	2	4	3	4

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare Insiemi Indipendenti dwl massimo valore possibile.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un Insieme Indipendente di valore massimo nel grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un massimo Insieme Indipendente di massimo valore su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = A, B, C, D, E, F$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nell'Insieme Indipendente" e 0 significa "nodo non incluso nell'Insieme Indipendente".

Volendo massimizzare il valore dell'Insieme Indipendente, la funzione obbiettivo sarà:

$$\max 2\,x_A + 3\,x_B + 2\,x_C + 4\,x_D + 3\,x_E + 4\,x_F$$

ciascuno dei vincoli corrisponde poi ad uno degli archi.

arco AB**:** $x_A + x_B \leq 1;$

arco AD**:** $x_A + x_D \leq 1;$

arco BC**:** $x_B + x_C \leq 1;$

arco BD**:** $x_B + x_D \leq 1;$

arco CD**:** $x_C + x_D \leq 1;$

arco CF**:** $x_C + x_F \leq 1;$

arco DE**:** $x_D + x_E \leq 1;$

arco EF**:** $x_E + x_F \leq 1.$

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_v \in \{0, 1\}$ per ogni nodo $v \in V$, con l'idea che 1 significa "nodo incluso nell'Insieme Indipendente" e 0 significa "nodo non incluso nell'Insieme Indipendente".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema MAX-INDEPENDENT-SET.

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w_v\, x_v\,, \\ x_u + x_v \leq 1 \text{ per ogni arco } uv \in E, \\ x_v \in \{0, 1\} \text{ per ogni nodo } v \in V. \end{aligned}$$

Qualora fosse richiesto di trovare un'Independent Set di massima cardinalità si ricadrà allora nella medesima formulazione posto $w \equiv 1$.

Problema 2 (4 punti):

Una pasticceria produce quattro tipi di creme, C_1, C_2, C_3, C_4, utilizzando 3 ingredienti base A, B e C. Per la produzione della crema C_4, inoltre, sono impiegate anche una certa quantità di C_1 e di C_2. In tabella sono riportate le quantità, in Kg, di componenti che sono necessari per produrre un Kg di ogni tipo di crema.

Crema	A	B	C	C_1	C_2
C_1	0,1	0,4	0,3	-	-
C_2	0,4	0,2	0,2	-	-
C_3	0,2	0,5	0,1	-	-
C_4	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3

Per il prossimo mese sono stati acquistati 900, 1100 e 800 Kg di A, B e C, rispettivamente. Nella tabella seguente sono riportati i profitti (in Euro per Kg di prodotto) di vendita per ogni tipo di crema.

	C_1	C_2	C_3	C_4
Profitto	4	3	2,5	3,5

Formulare il problema di pianificare la produzione giornaliera in modo da massimizzare il profitto, sapendo che la quantità di crema C_4 prodotta non deve essere superiore a 500Kg.

svolgimento.

Si indichino con x_A, x_B, x_C ed x_D i quantitativi (in chili) di crema da produrre. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei tre prodotti ossia

$$\max R = 4\, x_A + 3\, x_B + 2,5\, x_C + 3,5\, x_D\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0.$$

limite sulla quantità di crema D prodotta

$$x_D \leq 500.$$

disponibilitá di materie prime

$$\begin{aligned}
0,1\,x_A + 0,4\,x_B + 0,2\,x_C &+ (0,1 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,4)\,x_D &\leq& \quad 900,\\
0,4\,x_A + 0,2\,x_B + 0,5\,x_C &+ (0,1 + 0,1 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,2)\,x_D &\leq& \quad 1100,\\
0,3\,x_A + 0,2\,x_B + 0,1\,x_C &+ (0,2 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2)\,x_D &\leq& \quad 800,
\end{aligned}$$

Problema 3 (4 punti):

Trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **MINIMA**.

-18	8	-23	16	-20	42	-30	20	-24	33	-16	28	-7	15	-25	20	-7	8	-21	25	-13	17	-8	6	-6	4	-6

tipo intervallo	min sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi					
include ultimo					
include 9^o					
include 5^o e 10^o					
include 17^o					
include 14^o e 16^o					

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
-18	-10	-33	-17	-37	0	-30	-10	-34	-1	-17	0	-7	0	-25	-5	-12	-4	-25	0	-13	0	-8	-2	-8	-4	-10
-18	8	-23	16	-20	42	-30	20	-24	33	-16	28	-7	15	-25	20	-7	8	-21	25	-13	17	-8	6	-6	4	-6
-37	-19	-27	-4	-20	0	-34	-4	-24	0	-16	0	-17	10	-25	0	-20	-13	-21	0	-13	0	-10	-2	-8	-2	-6
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	min sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	-37	1	5	-18	-20
include ultimo	-10	23	27	-8	-6
include 9^o	-34	7	9	-30	-24
include 5^o e 10^o	-12	1	11	-18	-16
include 17^o	-25	15	19	-25	-21
include 14^o e 16^o	-17	13	19	-7	-21

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

54	51	49	54	50	34	27	3	51	30	2	47	24	36	9	7	46	48	54	30	5	42	25	13	44

5.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta una S-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga S-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 46. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) una sequenza è detta una A-sequenza se su una prima parte è crescente e poi sempre decrescente. Trovare la più lunga A-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo le seguenti tabelle di programmazione dinamica.

DECRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
54	51	49	54	50	34	27	3	51	30	2	47	24	36	9	7	46	48	54	30	5	42	25	13	44
1	2	3	1	3	4	5	6	2	5	7	4	6	5	7	8	5	4	1	6	9	5	7	8	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

e

DECRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	3	2	1	1
54	51	49	54	50	34	27	3	51	30	2	47	24	36	9	7	46	48	54	30	5	42	25	13	44
1	1	1	2	2	1	1	1	3	2	1	3	2	3	2	2	4	5	6	3	2	4	3	3	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	9	54, 51, 49, 34, 27, 24, 9, 7, 5
S-sequenza	12	54, 51, 49, 34, 27, 3, 2, 47, 36, 9, 7, 5
decrescente con 46	8	54, 51, 50, 47, 46, 30, 25, 13
A-sequenza	9	2, 24, 36, 46, 48, 54, 42, 25, 13

Problema 5 (6 punti):

6.1**(1pt)** Costruire un problema di PL che sia illimitato.

6.2**(1pt)** Costruire un problema di PL che abbia infinite soluzioni ottime.

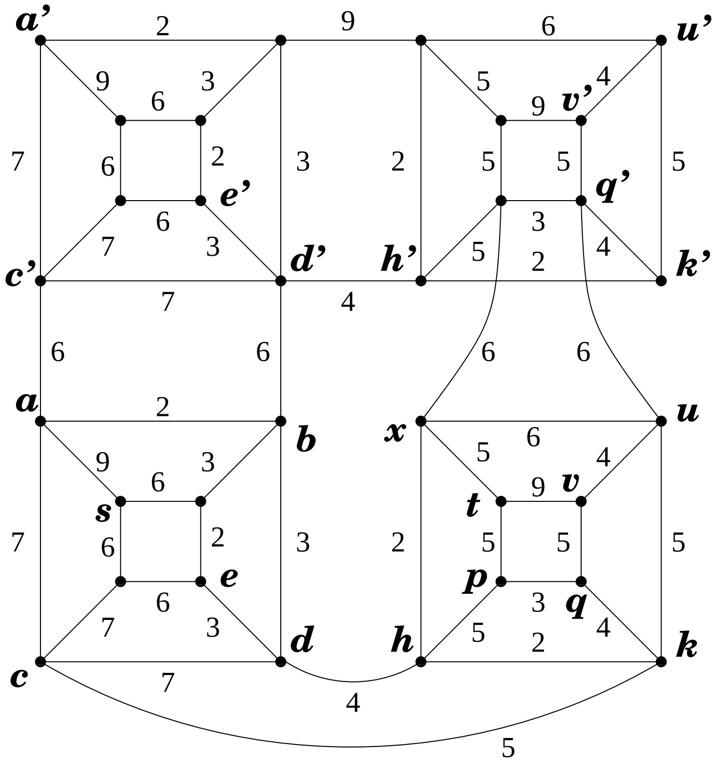
6.3**(1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale abbia infinite soluzioni ottime.

6.4**(1pt)** Costruire un problema di PL che abbia precisamente 2 soluzioni ottime di base.

6.5**(1pt)** Costruire un problema di PL che abbia precisamente 3 soluzioni ottime di base.

6.6**(1pt)** Costruire un problema di PL in cui l'unica soluzione ottima sia degenere.

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.2.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.3.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

7.4.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

7.5.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

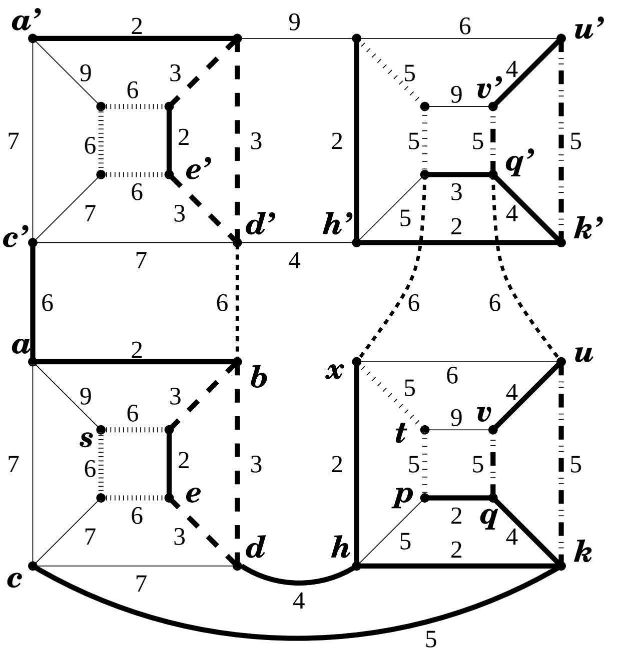
7.6.**(2pt)** Se il grafo è bipartito, aggiungere un arco in modo che esso cessi di essere bipartito. In caso contrario, dire quale è il minimo numero di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito. (Fornendo non solo certificato di bipartizione per il grafo ottenuto ma anche argomentando che la rimozione di un numero minore di archi non può bastare).

7.7.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

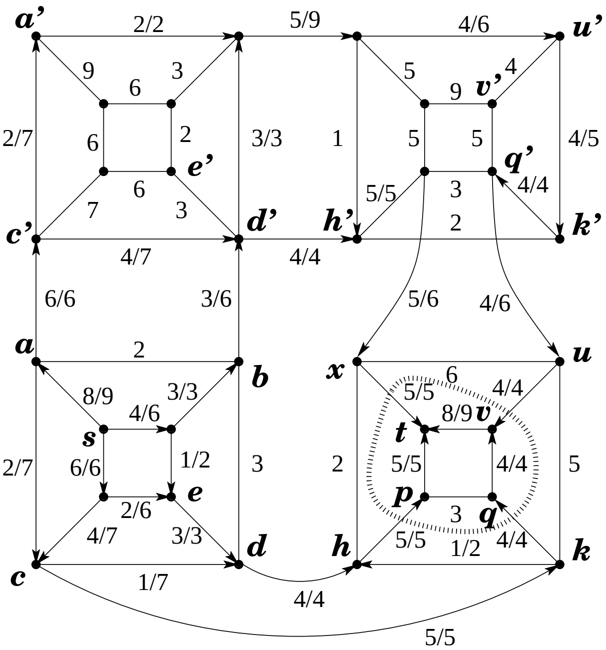
7.8.**(1pt)** Se il grafo è planare, aggiungere un arco in modo che esso cessi di essere planare. In caso contrario, dire quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo planare. (Fornendo certificato di planarità per il grafo ottenuto ed argomentando che la rimozione di un numero minore di archi non può bastare).

risposte.

La seguente figura, con due quadrati affiancati nella parte alta e due nella parte passa, esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2^4 3^5$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata nella parte alta (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata nella parte bassa (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 6 ed in linea sfumata spessa nella parte alta (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 6 ed in linea sfumata spessa nella parte bassa (3 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (più sfumata) nella parte alta (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (più sfumata) nella parte bassa (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea tratto-punteggiata nella parte alta (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea tratto-punteggiata nella parte bassa (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 3 archi verticali di peso 6 e che collegamo parte bassa e parte alta (3 scelte).

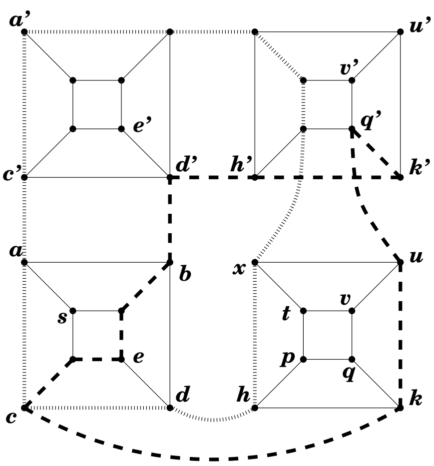


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

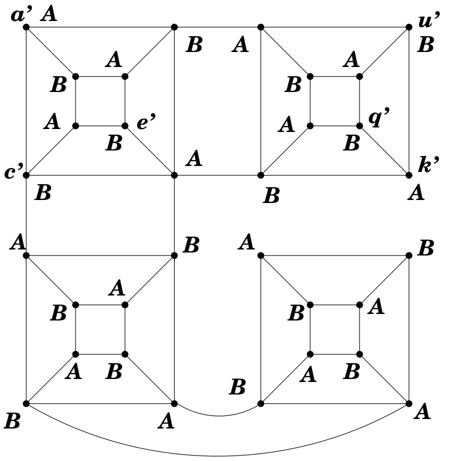


Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 18 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

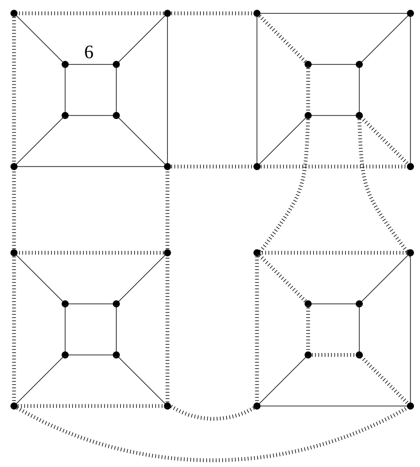
Il grafo non è bipartito poichè contiene circuiti dispari. Di fatto i due circuiti dispari esibiti in figura non hanno nodi in comune e quindi devo rimuovere almeno 2 nodi per rendere il grafo bipartito.



Di fatto, per rendere il grafo bipartito mi basta rimuovere i 2 archi uq' e xp'.



Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di K_5 in figura.



Tuttavia la rimozione di un solo arco basta a rendere il grafo planare (e chiaramente 1 è il più piccolo numero intero maggiore di 0).