

Esame di Ricerca Operativa - 4 settembre 2008

Facoltà di Architettura - Udine

- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B .

| nome | A | B | C | D | E | F | G | H | I | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| peso | 13 | 4 | 22 | 52 | 27 | 22 | 29 | 23 | 9 | 47 | 48 | 20 | 5 | 15 | 17 | 24 | 13 | 5 | 17 |
| valore | 26 | 10 | 42 | 60 | 40 | 42 | 32 | 40 | 22 | 99 | 64 | 20 | 8 | 24 | 40 | 44 | 24 | 12 | 32 |

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 36, ottenendo:

| nome | B | O | T | I | S | A | P | U | Q | H | F | C | N | R | G | E |
|--------|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| peso | 4 | 5 | 5 | 9 | 13 | 13 | 15 | 17 | 17 | 20 | 22 | 22 | 23 | 24 | 27 | 28 |
| valore | 10 | 8 | 12 | 22 | 24 | 26 | 24 | 32 | 40 | 20 | 42 | 42 | 40 | 44 | 40 | 30 |

Ovviamente non potrò mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che U e Q esauriscono da soli la capacità dello zaino (non posso aggiungere nemmeno l'elemento più leggero B) totalizzando solo 72 mentre B , P e Q raccolgono più valore con lo stesso ingombro. E quindi posso sempre preferire di prendere Q piuttosto che non U , o H , o N , o G , o E . Analogamente, posso rinunciare sempre a C visto che eventualmente lo posso sostituire con F (nessuna soluzione li può contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

| nome | B | O | T | I | S | A | P | Q | F | R |
|--------|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| peso | 4 | 5 | 5 | 9 | 13 | 13 | 15 | 17 | 22 | 24 |
| valore | 10 | 8 | 12 | 22 | 24 | 26 | 24 | 40 | 42 | 44 |

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

| B | max val | peso | quali prendere |
|----|------------------|---------------|----------------|
| 36 | $84=40+22+12+10$ | $35=17+9+5+4$ | Q,I,T,B |
| 26 | $62=40+12+10$ | $26=17+5+4$ | Q,T,B |
| 33 | $74=40+22+12$ | $31=17+9+5$ | Q,I,T |
| 22 | $52=40 +12$ | $22=17+5$ | Q,T |

Problema 2 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|---|-----|----|-----|----|-----|----|-----|---|-----|----|-----|---|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|
| 5 | -1 | 4 | -5 | 7 | -18 | 31 | -20 | 23 | -31 | 16 | -32 | 5 | -15 | 30 | -22 | 6 | -8 | 21 | -25 | 13 | -51 | 21 | -13 | 24 | -19 | 25 |
|---|----|---|----|---|-----|----|-----|----|-----|----|-----|---|-----|----|-----|---|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere sia il 14-esimo che il 16-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← | ← |
| 5 | 4 | 8 | 3 | 10 | 0 | 31 | 13 | 36 | 5 | 21 | 0 | 5 | 0 | 30 | 8 | 14 | 6 | 27 | 2 | 15 | 0 | 21 | 8 | 32 | 0 | 25 |
| 5 | -1 | 4 | -5 | 7 | -18 | 31 | -20 | 23 | -31 | 16 | -32 | 5 | -15 | 30 | -22 | 6 | -8 | 21 | -25 | 13 | -51 | 21 | -13 | 24 | -19 | 25 |
| 25 | 20 | 21 | 17 | 22 | 15 | 31 | 0 | 23 | 0 | 16 | 0 | 20 | 15 | 30 | 0 | 19 | 13 | 21 | 0 | 13 | 0 | 32 | 11 | 24 | 0 | 25 |
| ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ |

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo intervallo | max sum | parte da pos. | arriva a pos. | parte da val. | arriva a val. |
|-----------------------------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| qualsiasi | 32 | 23 | 25 | 21 | 24 |
| include primo | 25 | 1 | 7 | 5 | 31 |
| include 18-esimo | 27 | 15 | 19 | 30 | 21 |
| include 14-esimo e 16-esimo | 17 | 13 | 19 | 5 | 21 |

Problema 3 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 15 | 23 | 25 | 30 | 22 | 33 | 44 | 50 | 21 | 41 | 67 | 26 | 47 | 35 | 60 | 62 | 24 | 27 | 19 | 42 | 61 | 29 | 45 | 54 | 28 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

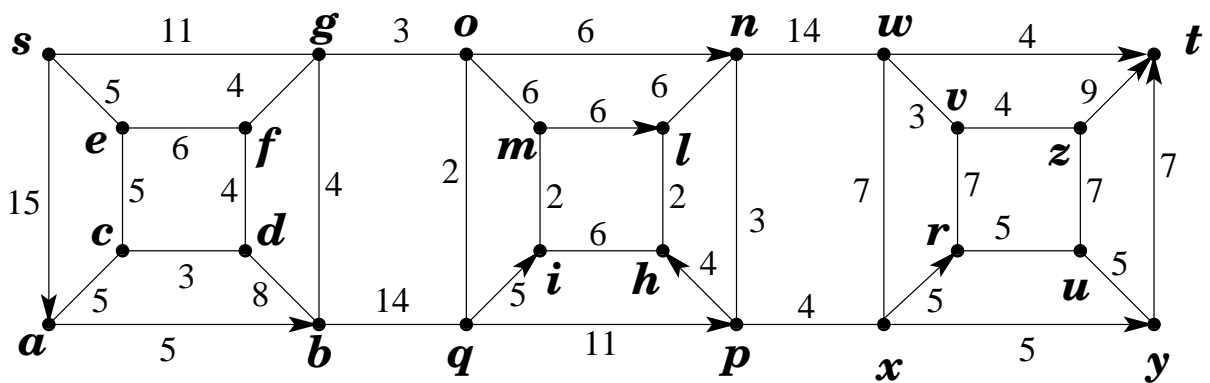
4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

- 5.6.(2pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.7.(3pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

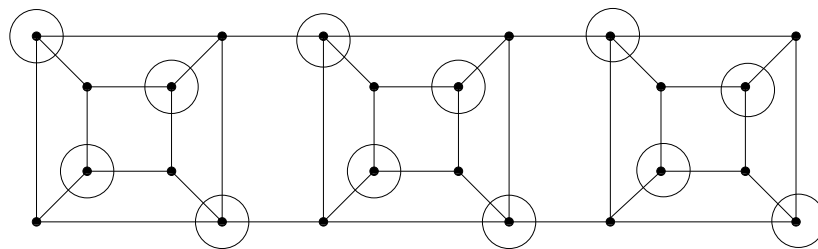
risposte.

Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.



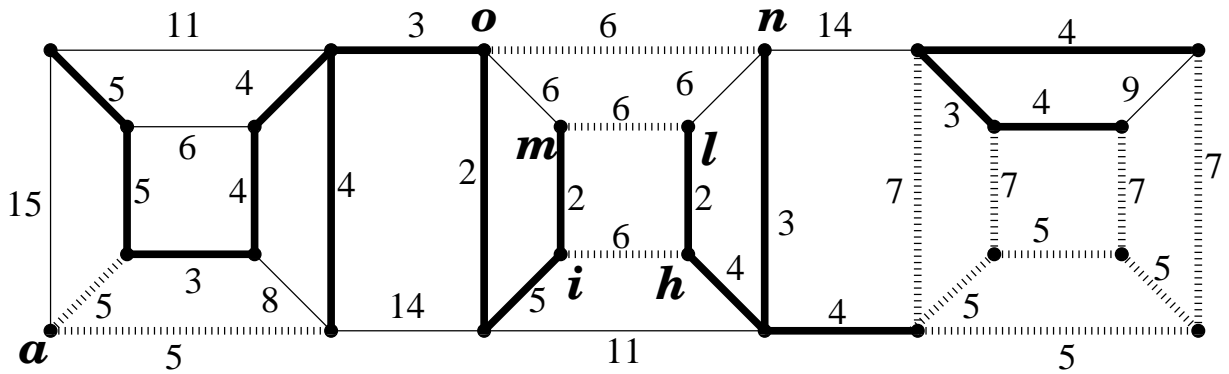
Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

Il fatto che G sia bipartito può essere messo in evidenza esibendo la 2-colorazione in figura.

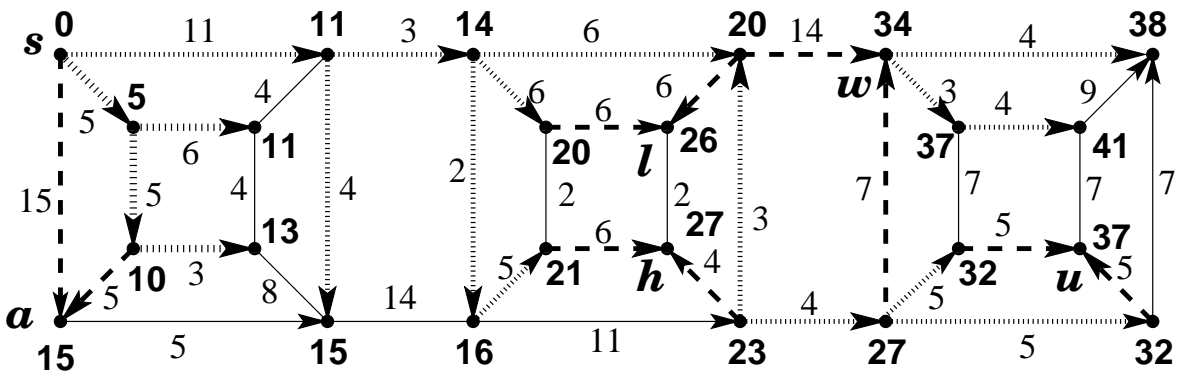


Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 0.

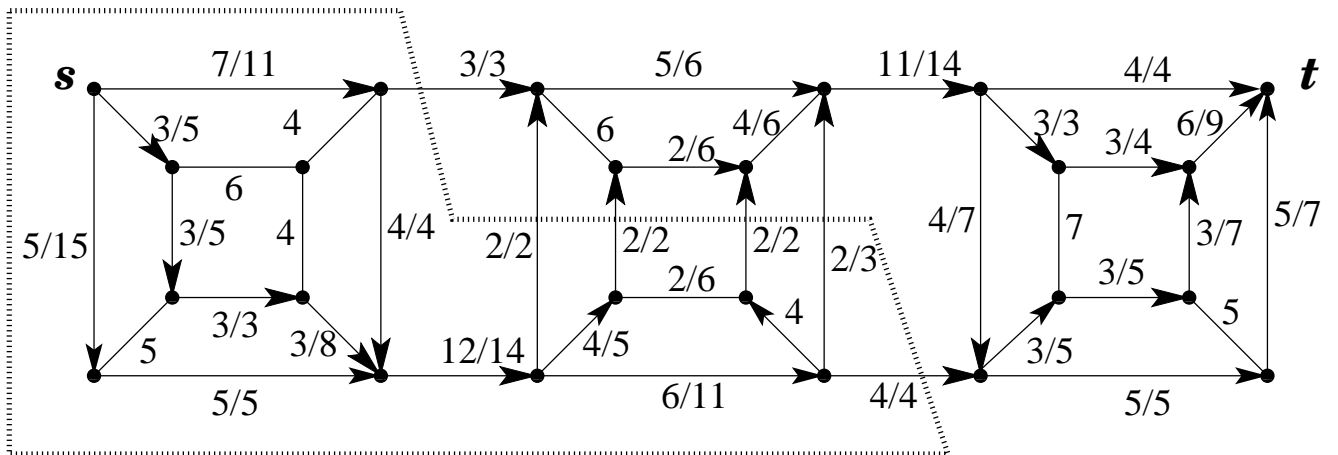
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ alberi ricoprenti di peso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on , ml , ih), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più 3 qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s . Ci sono $2^5 = 32$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a , uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo w , uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo h , uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo l e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo u .



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 15 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t . Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s, t -taglio, anch'esso di valore 15 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 5 (4+1 punti):

La PhotoMegaLux, azienda leader nella produzione di materiali ad uso fotografico, sta studiando i tempi di reazione di un nuovo acido per lo sviluppo di fotografie professionali. Sperimentalmente sono stati calcolati i tempi di sviluppo di una fotografia in base alla quantità di acido impiegato. In tabella sono riportati i tempi di sviluppo t in funzione delle quantità q di acido, per come rilevati empiricamente su 5 campioni di un provino.

| campione | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| litri | 0.3 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.9 |
| secondi | 30 | 15 | 4.5 | 3.5 | 2.6 |

La colonna $(i + 1)$ -esima della tabella ($1 \leq i \leq 5$) dice che sul campione i , dove sono stati utilizzati q_i litri di acido, la reazione ha avuto luogo in t_i secondi.

Sulla base dei dati sperimentali si vuole trovare una legge del tipo $t = Aq^2 + Bq + C$ che approssimi il più possibile l'andamento del tempo di reazione dell'acido. In particolare, si vorrebbe determinare una tripla di valori per i coefficienti A , B e C in modo che lo scostamento massimo $\max_{i=1}^5 |t_i - Aq_i^2 - Bq_i - C|$ sia il più contenuto possibile.

Fornire un modello di programmazione lineare per tale problema. Meglio se il modello viene fornito in forma astratta in modo da riferirsi ad un numero n arbitrario di campioni le cui misure possano essere prese in input da un database che raccolga i dati (una sequenza di n coppie (q_i, t_i)) raccolti in un ipotetico esperimento.

svolgimento.

Dobbiamo determinare il valore di tre variabili: A , B e C . Oltre ad esse, consideriamo le n quantità $\epsilon_i = |t_i - Aq_i^2 - Bq_i - C|$ (per $i = 1, 2, \dots, n$), ed introduciamo la variabile $\epsilon = \max_{i=1}^n \epsilon_i$.

L'obiettivo è quello di minimizzare il massimo scostamento, ossia

$$\min \epsilon,$$

dove, per $i = 1, 2, \dots, n$, sarà nostra cura riportare i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq t_i - Aq_i^2 - Bq_i - C \\ \epsilon &\geq Aq_i^2 + Bq_i + C - t_i \end{aligned}$$

Si noti che sia la funzione obiettivo che i $2n$ vincoli sono lineari nelle 4 variabili A , B , C ed ϵ . I coefficienti t_i , q_i^2 e q_i sono valori numerici ricavabili direttamente o per calcolo immediato dal database.

TABELLA DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|----|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | | | |
| <i>B</i> (4, 10) | 0 | . | . | . | 10 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| <i>O</i> (5, 8) | 0 | . | . | . | 10 | 8 | . | . | . | 18 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| <i>T</i> (5, 12) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | . | 30 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| <i>I</i> (9, 22) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | . | . | . | 44 | 42 | . | . | . | 52 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | |
| <i>S</i> (13, 24) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | . | . | 34 | 44 | 42 | . | . | 46 | 52 | . | . | 56 | 58 | . | . | . | . | . | 68 | 66 | . | . | . | 76 | |
| <i>A</i> (13, 26) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | . | 36 | 44 | 42 | . | . | 48 | 52 | . | . | 58 | 60 | . | . | 60 | 70 | 68 | . | . | . | 72 | 78 | | | |
| <i>P</i> (15, 24) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | 24 | . | 36 | 44 | 42 | 36 | . | 48 | 52 | 46 | 44 | 58 | 60 | 56 | 58 | 60 | 70 | 68 | 68 | 66 | 72 | 78 | | | |
| <i>Q</i> (17, 40) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | 24 | . | 40 | 44 | 42 | 36 | 50 | 52 | 52 | 46 | 44 | 62 | 60 | 56 | 58 | 72 | 74 | 68 | 68 | 76 | 84 | 82 | | | |
| <i>F</i> (22, 42) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | 24 | . | 40 | 44 | 42 | 36 | 50 | 52 | 52 | 46 | 44 | 62 | 60 | 56 | 58 | 72 | 74 | 68 | 68 | 76 | 84 | 82 | | | |
| <i>R</i> (24, 44) | 0 | . | . | . | 10 | 12 | . | . | . | 22 | 20 | . | . | 32 | 34 | 24 | . | 40 | 44 | 42 | 36 | 50 | 52 | 52 | 46 | 44 | 62 | 60 | 56 | 58 | 72 | 74 | 68 | 68 | 76 | 84 | 82 | | | |

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

| | | | | | | | | | | |
|--------|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| nome | B | O | T | I | S | A | P | Q | F | R |
| peso | 4 | 5 | 5 | 9 | 13 | 13 | 15 | 17 | 22 | 24 |
| valore | 10 | 8 | 12 | 22 | 24 | 26 | 24 | 40 | 42 | 44 |