Esame di Ricerca Operativa - 11 giugno 2008
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

La Seafood&C si compone di tre stabilimenti (che chiameremo S_1, S_2 e S_3) in cui si allevano vongole. La produzione di vongole comporta l'emissione di sostanze inquinanti. Per ogni inquinante, nella tabella seguente sono riportate le emissioni di ogni stabilimento per unità di produzione (in quintali di vongole) e la produzione attuale (sempre in quintali di vongole).

	fosfati	carbonati	nitrati	azoto	produzione attuale
S_1	4	2	1	9	20
S_2	3	1	5	6	30
S_3	1	7	3	7	10

Nel prossimo periodo, si richiede che ogni stabilimento abbia un livello di produzione almeno pari a quello attuale, ma che non produca più di 500 quintali di vongole.

Leggi sulla tutela ambientale impongono che nella zona interessata non si possano avere valori complessivi degli inquinanti più alti di quelli riportati in tabella seguente,

fosfati	carbonati	nitrati	azoto
100	210	180	250

Sapendo che ogni stabilimento vende il generico quintale di vongole al prezzo riportato nella tabella seguente, espresso in euro per chilo, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto complessivo.

S_1	S_2	S_3
50	60	40

svolgimento.

Per $i = 1, 2, 3$, denotiamo con x_i la quantità (in quintali) di vongole prodotte dallo stabilimento S_i. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei tre prodotti ossia

$$\max R \quad = \quad 5000\,x_1 + 6000\,x_2 + 4000\,x_3\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

vincoli di produzione minima

$$x_1 \geq 20, \qquad x_2 \geq 30, \qquad x_3 \geq 10.$$

vincoli di produzione massima

$$x_1 \leq 500, \qquad x_2 \leq 500, \qquad x_3 \leq 500.$$

vincoli di tutela ambientale

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + \ 350\,x_2 + \ x_3 &\leq 100, \\ 2\,x_1 + \ 1\,x_2 + \ 7\,x_3 &\leq 210, \\ 1\,x_1 + \ 5\,x_2 + \ 3\,x_3 &\leq 180, \\ 9\,x_1 + \ 6\,x_2 + \ 7\,x_3 &\leq 250. \end{aligned}$$

Questa volta omettere i vincoli di non-negatività non porterebbe ad ottenere risultati inattesi dato che questi sono implicati dai vincoli di produzione minima.

Problema 2 (4 punti):
Sia $B = 30$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	24	15	22	52	28	9	27	20	5	47	48	23	13	17	4	22	5	13	17
valore	22	12	21	30	15	11	20	10	6	71	32	20	13	20	5	21	4	12	16

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 30, ottenendo:

nome	Q	S	F	T	O	B	P	U	R	H	A	C	N	Q	G	E
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	13	12	16	20	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che $17 + 17 = 34 > 30$. E quindi posso sempre preferire di prendere P piuttosto che non U, o H, o N, o G, o E. Analogamente, posso rinunciare sempre ad C visto che eventualmente lo posso sostituire con R (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	Q	S	I	F	T	O	B	P	R	A
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30	36=20+11+5	30=17+9+4	P,F,Q
25	26=20+6	22=17+5	P,I
29	31=6+5+20	26=4+5+17	P,Q,I
21	25=20 +5	21=17+4	P,Q

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

5	-5	3	-4	27	-8	44	-20	23	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	21	-13	24	-37	14

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di rimanere a destra del 15-esimo elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
5	0	3	0	27	19	63	43	66	35	51	19	23	8	47	25	31	23	44	10	21	0	21	8	32	0	14
5	-5	3	-4	27	-8	44	-20	23	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	21	-13	24	-37	14
65	60	65	62	66	39	47	3	23	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	11	0	32	11	24	0	14
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	66	5	9	27	23
include primo	65	1	9	3	23
include 18-esimo	44	5	19	27	21
a destra del 15-esimo	32	23	25	21	24

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

14	19	21	15	17	34	41	65	18	38	64	22	45	32	57	59	23	20	16	38	58	27	42	52	25

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 45. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	7	6	8	7	5	4	1	6	4	1	5	3	4	2	1	4	4	4	3	1	3	2	1	1
14	19	21	15	17	34	41	65	18	38	64	22	45	32	57	59	23	20	16	38	58	27	42	52	25
1	2	3	2	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	7	8	6	5	3	7	8	7	8	9	7
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	14, 15, 17, 18, 22, 32, 38, 42, 52
N-sequenza	12	14, 15, 17, 34, 41, 65, 18, 22, 32, 38, 42, 52
crescente con 45	8	14, 15, 17, 18, 22, 45, 57, 59

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

Problema 5 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

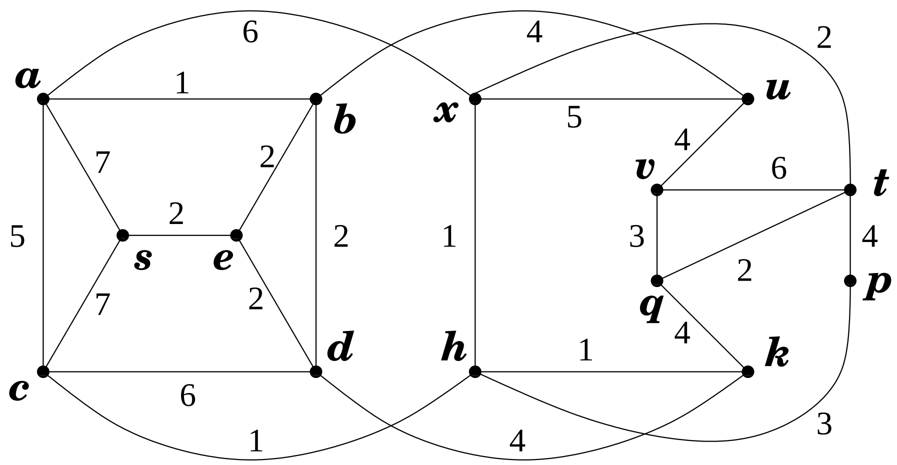
5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.3.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.4.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.5.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

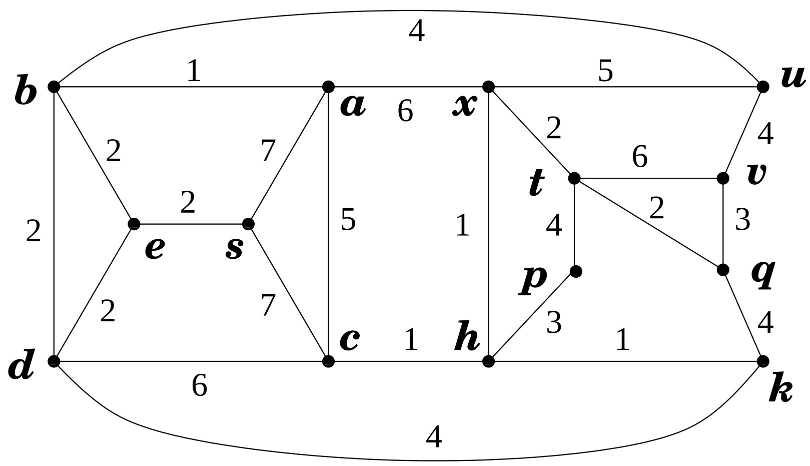


5.6.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

5.7.**(2pt)** Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito.

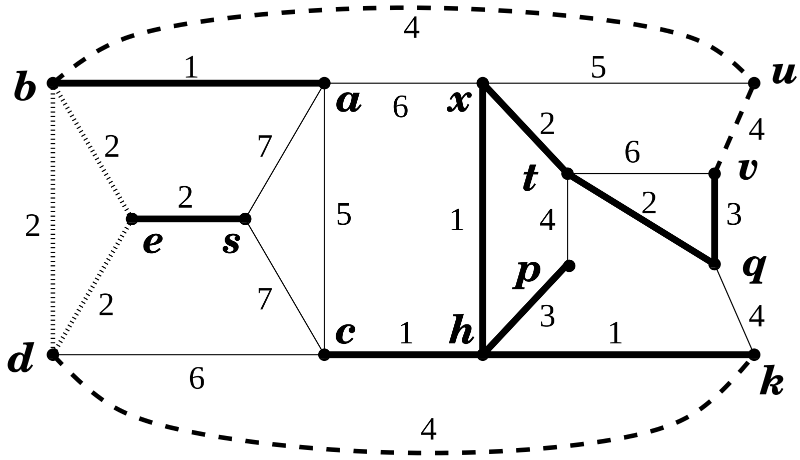
5.8.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto aggiungendo l'arco di estremi v e p è planare oppure no.

risposte.
Il fatto che G sia planare è messo in evidenza dal planar embedding fornito in figura.

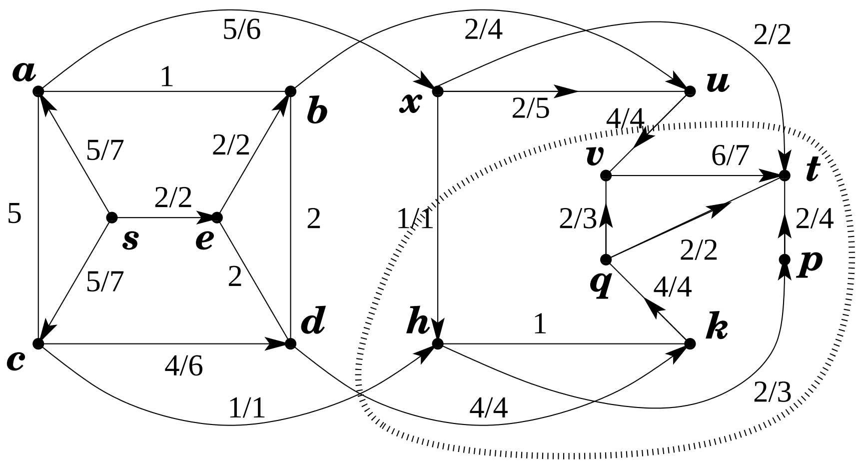


Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 9 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 9 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea tratteggiata, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 2 ed in linea sfumata spessa.

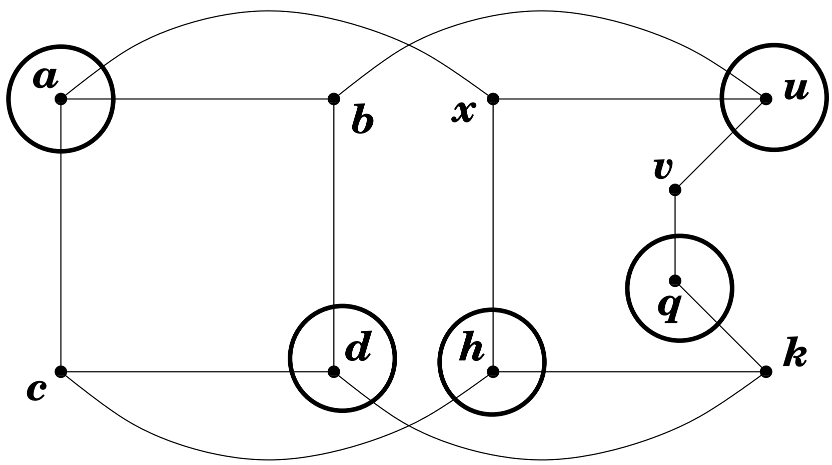


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì).

Il grafo non è bipartito poiché contiene circuiti dispari quali ad esempio il triangolo t, v, q. Di fatto il grafo contiene 3 triangoli senza nodi in comune: il triangolo t, v, q, il triangolo b, e, d, e il triangolo s, a, c. Pertanto non è possibile rendere il grafo bipartito senza rimuovere almeno 3 nodi. E si noti che con la rimozione dei 3 nodi e, s e q il grafo risulta bipartito come certificato dalla 2-colorazione dei suoi nodi esibita in figura.



Il fatto che $G + vp$ non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.

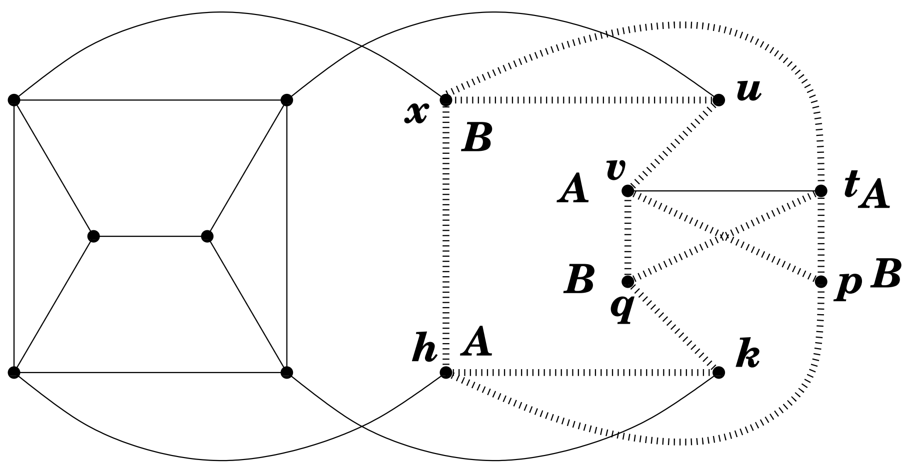


Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$Q(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$F(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$T(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$O(13,13)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	18	22	21	·	·	24	26	·	·	29	30	·	·	30
$B(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	18	22	21	18	·	24	26	23	22	29	30	28	29	30
$P(17,20)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36
$R(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36
$A(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	Q	S	I	F	T	O	B	P	R	A
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22