Esame di Ricerca Operativa - 27 giugno 2007
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un salumificio produce tre tipi di insaccati che possono essere venduti così come sono oppure venire affumicati. In funzionamento normale, l'affumicatoio può lavorare 42 Kg di insaccati al giorno, ed in funzionamento straordinario può lavorare ulteriori 25 Kg. I profitti dei vari tipi di insaccato (in Euro), in ragione del trattamento subito, sono riportati in tabella.

insaccato	produzione giornaliera	profitto normale	profitto affumicato ord.	profitto affumicato straord.
1	48	8	14	11
2	40	4	12	7
3	23	4	13	9

Per esempio, la prima riga della tabella deve essere così interpretata:

> giornalmente si producono 48 Kg dell'insaccato 1 che, se non affumicati comportano un profitto di 8 Euro/Kg. Se l'insaccato 1 viene affumicato diviene più pregiato ed il profitto passa da 8 a 14 Euro/Kg. Tuttavia tale profitto è di soli 11 Euro/Kg se si affumica in regime straordinario (bisogna considerare il costo per lo straordinario).

Si intende determinare una politica di gestione che massimizzi i profitti. Si formuli il problema mediante un modello di programmazione lineare.

svolgimento.

Risulta fondamentale introdurre le opportune variabili di decisione tenendo in mente l'espressibilità dei vari vincoli. Si scelgano come variabili i livelli di produzione di ogni insaccato. Ossia, per ogni tipo di insaccato $i = 1, 2, 3$, e per ogni livello di produzione $j \in \{n, ao, as\}$ (Normale, Affumicato Ordinario, Affumicato Straordinario), indichiamo con $x_{i,j}$ la quantità di insaccato di tipo i che venga processata tramite un procedimento di tipo j. L'obiettivo è quello di massimizzare il profitto totale netto Z

$$\begin{aligned}\max Z \;=\;& 8\,x_{1,n} + 14\,x_{1,ao} + 11\,x_{1,as}\\ & +4\,x_{2,n} + 12\,x_{2,ao} + 7\,x_{2,as}\\ & +4\,x_{3,n} + 13\,x_{3,ao} + 9\,x_{3,as}\end{aligned}$$

soggetto ai seguenti vincoli:

non negatività $x_{i,j} \geq 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e $j \in \{n, ao, as\}$.

quantità di insaccato da gestire

$$\begin{aligned}x_{1,n} + x_{1,ao} + x_{1,as} &= 48\\ x_{2,n} + x_{2,ao} + x_{2,as} &= 40\\ x_{3,n} + x_{3,ao} + x_{3,as} &= 23\end{aligned}$$

capacità affumicatoio

$$x_{1,ao} + x_{2,ao} + x_{3,ao} \leq 42 \qquad \text{(capacità normale)}$$
$$x_{1,as} + x_{2,as} + x_{3,as} \leq 25 \qquad \text{(capacità straord.)}$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$. Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere B, sia massima

$$4, 21, 52, 11, 17, 4, 21, 17, 21, 4, 27, 54, 6, 21, 27, 28, 48, 6, 8, 21, 52, 6$$

2.1(1pt) quale è il valore della somma massima? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 24$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

Dapprima ordino i valori forniti in input ottenendo:

$$4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 11, 17, 17, 21, 21, 21, 21, 27, 27, 28, 48, 52, 52, 54\,.$$

Poi mi sbarazzo degli ultimi 3 elementi visto che sono maggiori di 30. A questo punto compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

decine	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
unità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\{\,\}$	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\{4\}$ ins 4	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\{4,4\}$ ins 4	●	·	·	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\{4,4,4\}$ ins 4	●	·	·	·	●	·	·	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\{\cdots\}$ ins 6	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\{\cdots\}$ ins 6	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·
$\{\cdots\}$ ins 6	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	·	·	●
$\{\cdots\}$ ins 8	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●	·	●
$\{\cdots\}$ ins 11	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
$\{\cdots\}$ ins 17	●	·	·	·	●	·	●	·	●	·	●	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Nella precedente tabella si noti che 'inserimento del 17 non ha potuto alterare la situazione poichè tutti i numeri maggiori di 16 (ed inferiori a 30) erano già ottenibili. Pertanto anche il 21 e tutti gli altri numeri successivi non servono ad allargare il ventaglio dei numeri generabili.

A questo punto scopro che $30 = 6{+}6{+}6{+}4{+}4{+}4$, $24 = 6{+}6{+}4{+}4{+}4$, $26 = 6{+}6{+}6{+}4{+}4$, $21 = 11 + 6 + 4$ sono tutti ottenibili.

B	max sum	quali prendere
30	30	6+6+6+4+4+4
24	24	6+6+4+4+4
26	26	6+6+6+4+4
21	21	11+6+4

Problema 3 (4 punti):
Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **minima**.

-13	24	-31	16	-32	4	-15	69	-22	6	-8	21	-4	11	-45	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	7	-21

3.1(1pt) quale è il **minimo** valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l'11-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
-13	0	-31	-15	-47	-43	-58	0	-22	-16	-24	-3	-7	0	-45	-18	-26	0	-20	0	-39	-14	-24	-16	-31	-24	-45
-13	24	-31	16	-32	4	-15	69	-22	6	-8	21	-4	11	-45	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	7	-21
-47	-34	-58	-27	-43	-11	-15	0	-41	-19	-25	-17	-38	-34	-45	0	-8	0	-42	-22	-45	-6	-31	-21	-29	-14	-21
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	min sum	parte da	arriva a
qualsiasi	-58	3	7
include primo	-47	1	7
include 11-esimo	-41	9	15
include 19-esimo	-42	19	27

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

23	17	19	14	18	32	39	60	17	36	61	20	41	30	55	57	21	18	14	36	59	25	40	51	23

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
7	8	7	8	7	6	5	2	6	5	1	5	4	4	3	2	4	4	4	3	1	2	2	1	1
23	17	19	15	18	32	39	60	16	36	61	20	41	30	55	57	21	18	14	36	59	42	40	51	23
1	1	2	1	2	3	4	5	2	4	6	3	5	4	6	7	4	3	1	5	8	6	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Crescente

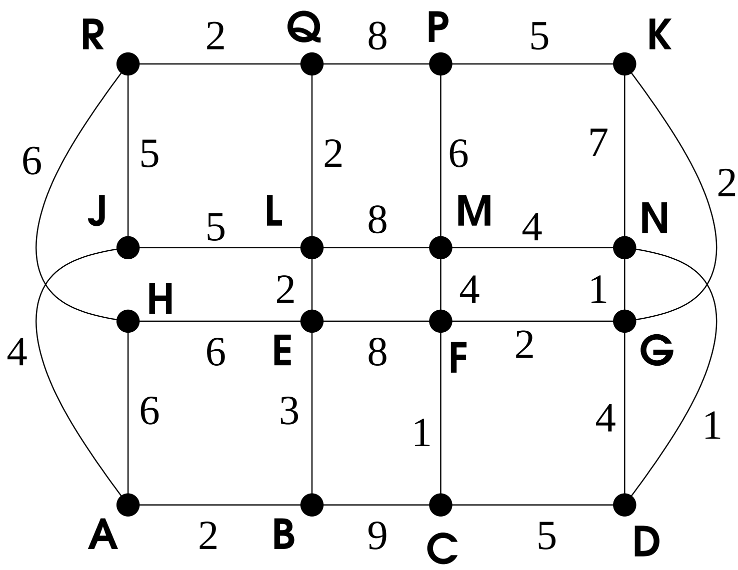
Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	15, 18, 32, 39, 41, 55, 57, 59
Z-sequenza	11	15, 18, 32, 36, 41, 55, 57, 21, 36, 42, 51
crescente con 21	7	15, 16, 20, 21, 36, 42, 51

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza oppure la più lunga V-sequenza (si veda il tema precedente per le definizioni)?

Provare per esercizio a determinare la più lunga V-sequenza.

Problema 5 (9 punti):
Si consideri il grafo in figura.



Con riferimento al grafo in figura, si affrontino i seguenti gruppi di esercizi.

Gruppo 5.1 (5 punti):

5.1.1(2pt) Trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

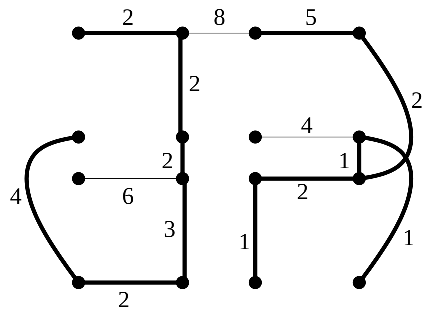
5.1.2(1pt) Indicare quali archi non siano contenuti in alcun albero ricoprente di peso minimo.

5.1.3(1pt) Indicare quali archi siano contenuti in ogni albero ricoprente di peso minimo.

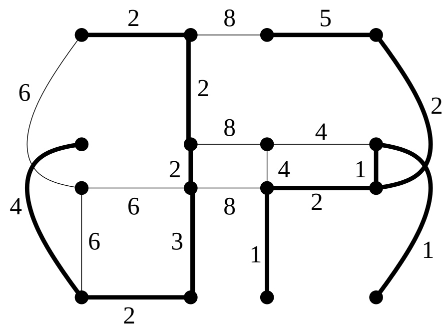
5.1.4(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

risposte.

Un albero ricoprente di peso minimo, come reperito tramite l'algoritmo di Kruskal, è riportato nella seguente figura ed ha peso 45. Gli archi in grassetto sono quegli archi che appartengono ad ogni soluzione ottima, ossia quegli archi la cui rimozione conduce ad un aumento del costo dell'albero ricoprente di peso minimo.



Nella seguente figura vengono riportati tutti e soli quegli archi del grafo originario che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo. Gli archi contenuti in ogni soluzione ottima sono ancora rappresentati tramite linee molto spesse. Il peso complessivo degli archi contenuti in ogni soluzione ottima ammonta a 27.



Gli alberi di peso minimo sono $18 = 3^2 \cdot 2$ e ciascuno di essi può essere generato aggiungendo all'insieme degli archi presenti in ogni soluzione ottima (quelli in neretto) alcuni degli archi "opzionali" (quelli che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo come riportati sopra) seguendo la seguente politica.

1. aggiungere uno qualsiasi dei 3 archi di peso 8 disposti a sinistra;

2. aggiungere uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 incidenti al nodo H;

3. aggiungere uno qualsiasi dei 2 archi di peso 4 incidenti al nodo M.

Le 3 scelte di cui sopra sono indipendenti.

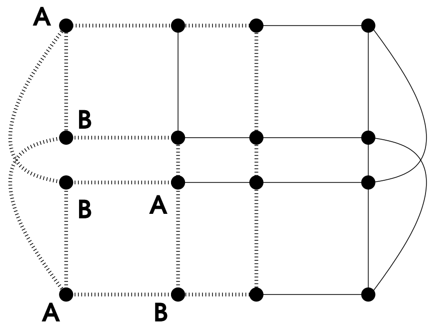
Gruppo 5.2 (4 punti):

5.2.3(2pt) Il grafo in figura è bipartito? Fornire certificato. In caso contrario, quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito? (E certificare anche questa seconda risposta).

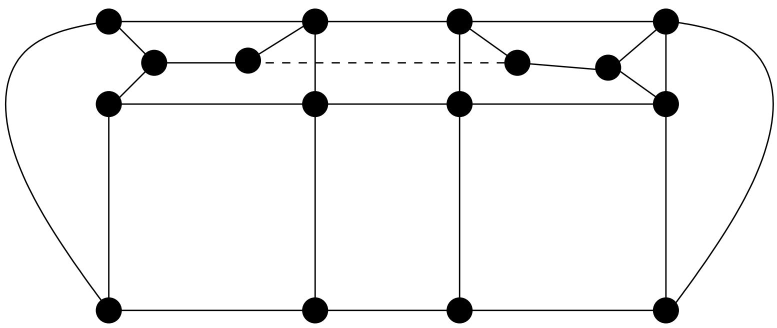
5.2.4(2pt) Il grafo in figura è planare? Fornire certificato. In caso contrario, quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo planare? (E certificare anche questa seconda risposta).

risposte.

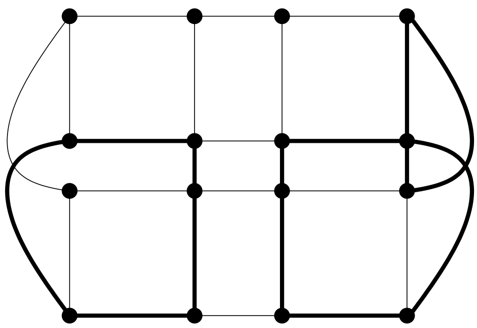
Il grafo assegnato non è planare poichè contiene la suddivisione di $K_{3,3}$ evidenziata in figura.



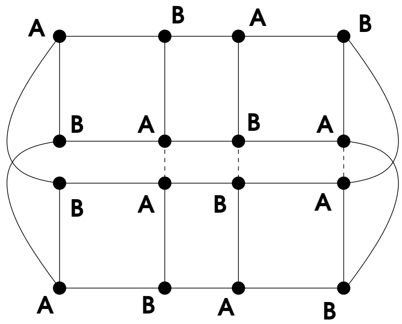
E tuttavia con la rimozione di un solo arco è possibile ottenere il grafo planare riportato qui sotto in figura.



Infine, il grafo non è bipartito poichè contiene un ciclo dipari: $ABELJ$. Di fatto il grafo contiene un secondo ciclo dispari in tutto simmetrico al precedente: $DCFMN$. Inoltre il grafo contiene anche dei triangoli. Ma si guardi ora ai 3 cicli dispari evidenziati nella seguente figura.



Poichè questi 3 cicli dispari non hanno archi in comune ne consegue che è necessario rimuovere almeno 3 archi per ottenere un grafo bipartito. Nella seguente figura si vede come la rimozione di 3 archi sia in effetti sufficiente all'ottenimento di un grafo bipartito.



Problema 6 (7 punti):

$$\max \; -x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

6.2(1pt) Scrivere il problema duale del problema originario.

6.3(1pt) Porre il problema duale in forma standard.

6.4(1pt) Risolvere il problema duale (in forma standard) con il metodo del simplesso.

6.5(1pt) Ricavare una soluzione primale ottima e specificarne il valore.

6.6(2pt) Per il problema primale, quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability del primo vincolo? (Per piccole variazioni.) E quanto per ogni unità di incremento per il secondo vincolo?

svolgimento.
Il problema ausiliario è il seguente (si veda la correzzione del tema scritto precedente per maggiori commenti sul problema ausiliario e suo utilizzo).

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_0 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema duale è invece il seguente problema di minimizzazione.

$$\min \; -5\,y_1 + 4\,y_2$$
$$\begin{cases} 2y_1 + \;\; 2y_2 \geq -1 \\ -5y_1 - \;\; y_2 \geq -3 \\ y_1 + \;\; 2y_2 \geq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Posto in forma standard, il problema duale diviene il seguente.

$$-\max \; 5\,y_1 - 4\,y_2$$
$$\begin{cases} -2y_1 - \;\; 2y_2 \leq 1 \\ 5y_1 + \;\; y_2 \leq 3 \\ -y_1 - \;\; 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$-\max \; 5\,y_1 - 4\,y_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 1 + 2y_1 + 2y_2 \\ w_2 = 3 - 5y_1 - y_2 \\ w_3 = 1 + y_1 + 2y_2 \\ y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti che il problema duale in forma standard è ad origine ammissibile, quindi possiamo partire direttamente con la seconda fase del metodo del simplesso (avremo potuto altresì avvalerci del metodo del simplesso duale applicato al problema primale originario). Il primo pivot porta la variabile y_1 in base e la w_2 è di necessità la variabile uscente.

$$-\max \; 3 - 5\,y_2 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = \frac{11}{5} + \frac{8}{5}y_2 - \frac{2}{5}w_2 \\ y_1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_2 - \frac{1}{5}w_2 \\ w_3 = \frac{8}{5} + \frac{9}{5}y_2 - \frac{1}{5}w_2 \\ y_1, y_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia già ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot. La soluzione di base duale ottima associata al dizionario è $y_1 = \frac{3}{5}$, $y_2 = 0$. Ma allo stesso dizionario è anche associata la soluzione di base primale ottima che è data da $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Ad entrambe (primale e duale) queste due soluzioni di base ottime corrisponde un valore di -3 per la funzione obiettivo.

Si noti che nella soluzione ottima la $y_2 = 0$, ossia la soluzione duale certifica l'ottimalità della soluzione primale anche senza fare ricorso al moltiplicatore del secondo vincolo. Ciò significa che non abbiamo alcun interesse a spostare il secondo vincolo. Invece, per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $y_1 = \frac{3}{5}$ (almeno per piccoli incrementi).

Problema 7 (6 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max\ 2\,x_1 + 3\,x_2$$
$$\begin{cases} x_1 & \leq 5 \\ \quad x_2 & \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.1**(1pt)** Fornire la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$.

1.2**(1pt)** Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle due risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a $+\infty$? (Se vi è un limite, specificare quale).

1.3**(1pt)** Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

1.4**(1pt)** Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.

1.5**(1pt)** È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.

1.6**(1pt)** Aggiungere un vincolo in modo che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ individuata al primo punto resti ammissibile, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari non possano sicuramente più consentire di individuare univocamente una soluzione duale gemella.

Soluzione Ottima: La soluzione ottima è ovviamente $\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 7$.

Prezzi Ombra: I prezzi ombra sono ovviamente $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Questi costituiscono inoltre l'unica soluzione duale gemella della soluzione ottima $\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 7$. L'unicità deriva dal fatto che la soluzione $\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 7$ non é degenere. Infine i prezzi ombra risultano equi per un qualsiasi incremento della funzione obiettivo. (Si assume che i termini noti dei vincoli siano comunque matenuti non negativi poiché in caso contrario si ha la perdita dell'ammissibilitá in quanto si entra in contraddizione con i vincoli di non negativitá).

Robustezza soluzione ottima: La soluzione $\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 7$ resta ottima fintantochè i coefficienti della x_1 e della x_2 nella funzione obiettivo restano non-negativi.

Considerazioni sul duale: Poichè il problema primale ha una soluzione ottima, l'esistenza di una soluzione duale gemella segue dal teorema della dualità forte. Inoltre la soluzione gemella sarà unica in quanto la soluzione primale ottima è di base e non degenere.

Vincolo aggiuntivo: Se ad esempio aggiungiamo il vincolo $x_1 + x_2 = 12$, allora la soluzione di base considerata ($\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 7$) resta ammissibile ma diviene degenere in quanto soddisfa ad uguaglianza un vincolo in più di quanto essenziale all'essere di base (infatti $5{+}7 = 12$). A questo punto la soluzione duale che dimostra l'ottimalità della soluzione primale perde in univocità (dacchè nel placcare la funzione obiettivo posso combinare un vincolo in più dello stretto necessario). Come esercizio, si verifichi con mano in questo caso specifico quanto qui detto in astratto ed a valenza generale.