Esame di Ricerca Operativa - 18 aprile 2007
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):
Sia $B = 30$. Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere B, sia massima

$$54, 27, 28, 48, 13, 5, 17, 4, 52, 22, 5, 24, 22, 17, 9, 13, 23$$

1.1(1pt) quale è il valore della somma massima? Quali elementi devo prendere?

1.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

1.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

1.4 (1pt) e nel caso $B = 20$?

Dapprima ordino i valori forniti in input ottenendo:

$$4, 5, 5, 9, 13, 13, 17, 17, 22, 22, 23, 24, 27, 28, 48, 52, 54 .$$

Poi mi sbarazzo degli ultimi 3 elementi visto che sono maggiori di 30. A questo punto compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

	decine	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
	unità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
{ }		●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{4}	ins 4	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{4, 5}	ins 5	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 5	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 9	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 13	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	·
{···}	ins 13	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●
{···}	ins 17	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●
{···}	ins 17	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●
{···}	ins 22	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●
{···}	ins 22	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	·	·	●	●	·	·	●
{···}	ins 23	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	·	·	●	●	●	·	●
{···}	ins 24	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	●	·	●	●	●	●	●
{···}	ins 27	●	·	·	·	●	●	·	·	·	●	●	·	·	●	●	·	·	●	●	●	·	●	●	●	●	·	●	●	●	●	●

A questo punto scopro che $30 = 13+13+4$ e $29 = 24+5$ sono entrambi ottenibili. Invece, per $B = 25$, la miglior somma che posso ottenere è $24 = 24$. Infine, per $B = 20$, la miglior somma che posso ottenere è $19 = 9 + 5 + 5$.

B	max sum	quali prendere
30	30	13+13+4
25	24	24
29	29	24+5
20	19	9+5+5

Problema 2 (4 punti):
Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1

2.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il primo elemento?

2.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 11-esimo elemento?

2.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 21-esimo elemento?

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
21	8	32	1	17	0	4	0	39	17	23	15	36	2	13	0	27	19	63	43	66	27	52	42	50	35	36
21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1
32	11	24	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	22	11	66	39	47	3	23	0	25	0	8	0	1
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	66	17	21
include primo	32	1	3
include 11-esimo	36	9	13
include 21-esimo	66	17	21

Problema 3 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

25	18	20	15	19	33	40	64	18	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23

3.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3.3(2pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Una A-sequenza fa l'esatto contrario, ossia prima cresce e poi cala (diviene una V-sequenza se si inverte il segno di tutti i valori). Trovare la più lunga A-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	2	4	1	3	5	6	6	2	5	6	3	5	4	4	4	3	2	1	3	3	2	2	2	1
25	18	20	15	19	33	40	64	18	37	65	21	44	31	56	58	22	19	15	37	60	26	41	51	23
1	1	2	1	2	3	4	5	1	4	6	3	5	4	6	7	4	2	1	5	8	5	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

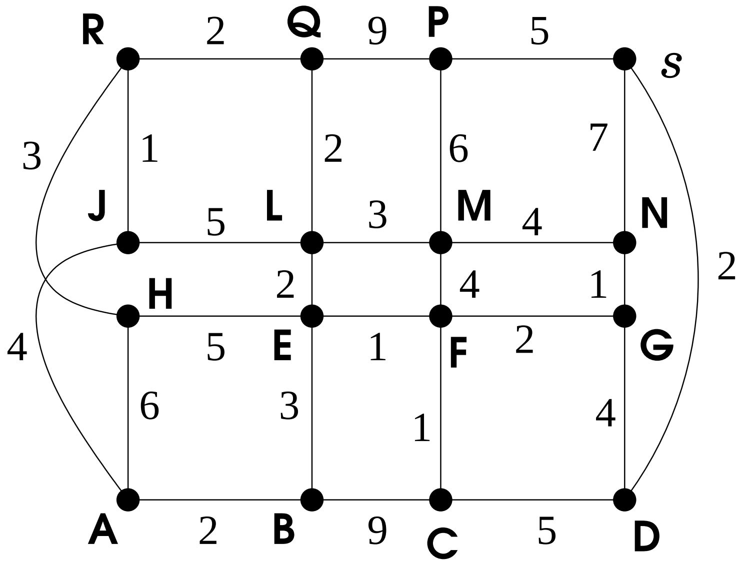
Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	15, 19, 33, 37, 44, 56, 58, 60
decrescente	6	40, 37, 31, 22, 19, 15
A-sequenza	11	15, 19, 33, 40, 64, 65, 44, 31, 22, 19, 15

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

Provare per esercizio a determinare la più lunga V-sequenza (risposta: lunghezza 10).

Problema 4 (9 punti):
Si consideri il grafo in figura.



Con riferimento al grafo in figura, si affrontino i seguenti gruppi di esercizi.

Gruppo 4.1 (5 punti):

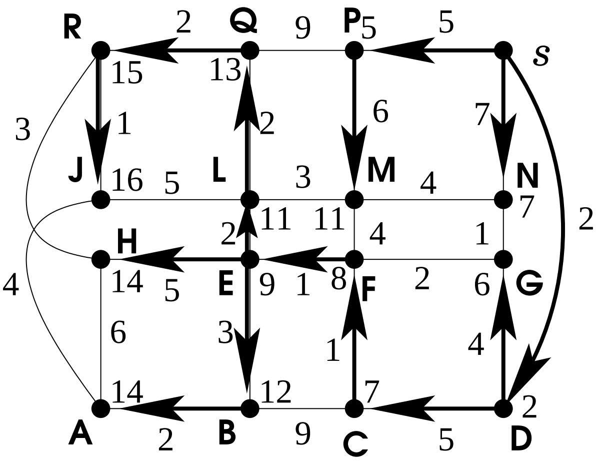
4.1.1(2pt) Trovare l'albero dei cammini minimi da s.

4.1.2(1pt) Indicare quali archi non siano contenuti in alcun albero dei cammini minimi da s.

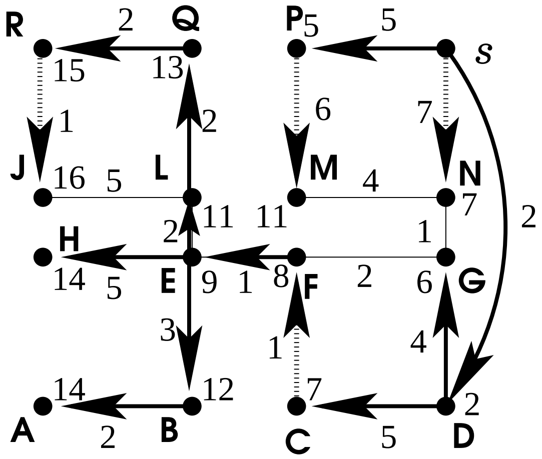
4.1.3(1pt) Indicare quali archi siano contenuti in ogni albero dei cammini minimi da s.

4.1.4(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

risposte.
Le distanze da s ed un albero dei cammini minimi da s possono essere ottenuti eseguendo l'algoritmo di Dijkstra. Un albero dei cammini minimi da s è riportato nella seguente figura.



Nella seguente figura vengono riportati tutti e soli quegli archi del grafo originario che appartengono ad un qualche albero dei cammini minimi da s; infatti abbiamo rimosso tutti quegli archi la cui lunghezza eccedeva la differenza tra i potenziali (=etichette riportanti le distanze) degli estremi. Gli archi contenuti in ogni soluzione ottima sono rappresentati tramite linee piene, come lo erano nella figura precedente. Invece, gli archi che possono essere non utilizzati (senza per questo incrementare delle distanze) sono stati ora tratteggiati.



Gli alberi di peso minimo sono $16 = 2^4$ e ciascuno di essi può essere ottenuto dall'albero sopra riportato applicando un sottoinsieme qualsiasi delle seguenti 4 possibili sostituzioni.

1. rimpiazza l'arco RJ con l'arco LJ;
2. rimpiazza l'arco PM con l'arco NM;
3. rimpiazza l'arco CF con l'arco GF;
4. rimpiazza l'arco sN con l'arco GN.

Le 4 scelte di cui sopra sono indipendenti.

GRUPPO 4.2 (4 PUNTI):

4.2.1(1pt) Il grafo in figura ammette un ciclo Euleriano? Perchè? E quale è il minimo numero di archi la cui aggiunta mi consente di ottenere un ciclo Euleriano? Ammette un cammino Euleriano?

4.2.2(1pt) Il grafo in figura ammette un cammino Hamiltoniano? Fornire certificato.

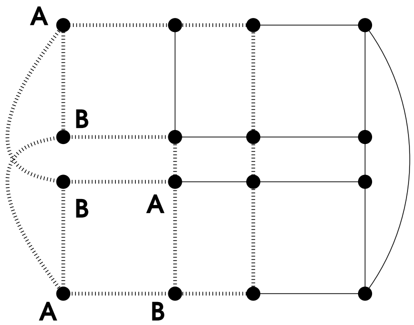
4.2.3(1pt) Il grafo in figura è bipartito? Fornire certificato.

4.2.4(1pt) Il grafo in figura è planare? Fornire certificato.

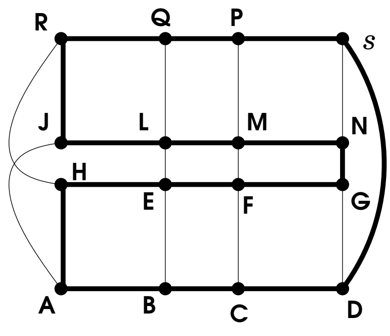
risposte.

Si noti che 12 dei 16 nodi del grafo hanno grado dispari. Ciò implica che il grafo non ammette cicli Euleriani ($12 > 0$) e nemmeno cammini Euleriani ($12 > 2$) e che occorre aggiungere almeno $12/2 = 6$ archi per rendere pari il grado di ogni nodo. In effetti è facile aggiungere 6 archi rendendo pari il grado di ogni nodo; a quel punto il grafo, che è ovviamente connesso, sarà anche Euleriano.

Il grafo assegnato non è planare poichè contiene la suddivizione di $K_{3,3}$ evidenziata in figura.



Nella seguente figura, gli archi in neretto costituiscono un ciclo Hamiltoniano.



Infine, il grafo non è bipartito poichè contiene un ciclo dipari: $ABELJ$.

Problema 5 (2 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 1x_3 \geq 4 \\ 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

7.1**(1pt)** Scrivere il problema duale.

7.2**(1pt)** Porre il problema primale in forma standard.

Duale:

$$\min\ 4y_1 + 7y_2 + 10y_3 + 3y_4$$
$$\begin{cases} 4y_1 + 6y_2 + 1y_3 + 1y_4 \geq 3 \\ 5y_1 - 6y_2 + 8y_3 + 1y_4 = -7 \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 1y_4 \leq 2 \\ y_3, y_4 \geq 0, y_1 \leq 0 \end{cases}$$

Forma Standard:

$$\max\ 3x_1 - 7x_2^+ + 7x_2^- - 2x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 1x_3 \leq -4 \\ 6x_1 - 6x_2^+ + 6x_2^- - 2x_3 \leq 7 \\ -6x_1 + 6x_2^+ - 6x_2^- + 2x_3 \leq -7 \\ x_1 + 8x_2^+ - 8x_2^- - 3x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 6 (7 punti):

$$\max\ -x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(2pt) Impostare il problema ausiliario.

6.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

6.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

6.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability del secondo vincolo? (Per piccole variazioni.)

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_0 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_0 \\ w_2 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 5 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max \; -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 - w_1$$
$$\begin{cases} x_0 = 5 + 2x_1 - 5x_2 + x_3 + w_1 \\ w_2 = 9 - 4x_2 - x_3 + w_1 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. A farle posto è la x_0 che si annulla, quindi il problema originario era ammissibile (basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla (in caso di dizionario degenere potrei anche decidere di portare fuori base un'altra variabile, ma non sarebbe una buona idea ...).

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 - \frac{1}{5}x_0 \\ w_2 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$\max \; -x_1 - 3x_2 - x_3 = -3 - \frac{11}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{3}{5}w_1$$
$$\begin{cases} x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 \\ w_2 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 \\ x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia già ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di -3 per la funzione obiettivo.

Si noti che nella soluzione ottima la w_2 è in base e vale $5 > 0$. Ciò significa che non abbiamo alcun interesse a spostare il secondo vincolo. Invece, per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{3}{5}$ (almeno per piccoli incrementi).

Problema 7 (4 punti):

Una raffineria miscela 4 tipi di petrolio greggio in diverse proporzioni per ottenere 3 diversi tipi di benzina: normale, super, e senza piombo. La massima quantità disponibile di ciascun componente greggio e il corrispondente costo di acquisto sono riportati in tabella.

Componente	Disponibilità max (barili)	Costo (euro/barile)
1	5000	9
2	2400	7
3	4000	12
4	1500	6

Per poter soddisfare le specifiche qualitative dei diversi tipi di benzina è necessario rispettare dei limiti sulla percentuale di ciascun componente impiegato. Tali limiti sono espressi assieme ai prezzi di vendita delle benzine nella seguente tabella.

Benzina	Specifiche qualitative	Prezzo (euro/barile)
Normale	almeno il 40% di 2	12
	e al massimo il 50% di 2	
Super	almeno il 40% di 3	18
SenzaPb	al massimo il 50% di 2	10

Si vuole determinare il mix ottimale dei quattro componenti che massimizzi il guadagno totale derivante dalla vendita delle benzine. Si formuli il problema mediante un modello di programmazione lineare.

svolgimento.

Questo è un problema di mix-ottimo. Risulta fondamentale introdurre le opportune variabili di decisione tenendo in mente l'espressibilità dei vari vincoli. Per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ (quanti i tipi di greggio), e per ogni $j = 1, 2, 3$ (Normale,Super,SenzaPb), indichiamo con $x_{i,j}$ la quantità di greggio di tipo i che trova impiego nella produzione di benzina di tipo j.

L'obiettivo é quello di massimizzare il guadagno totale netto Z

$$\begin{aligned}\max Z \quad = \quad & 12\,(x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}) \\ & +18\,(x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2}) \\ & +10\,(x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -9\,(x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}) \\
& -7\,(x_{2,1}+x_{2,2}+x_{2,3}) \\
& -12\,(x_{3,1}+x_{3,2}+x_{3,3}) \\
& -6\,(x_{4,1}+x_{4,2}+x_{4,3}) \\
= \quad & 3\,x_{1,1}+9\,x_{1,2}+x_{1,3}+5\,x_{2,1}+11\,x_{2,2}+3\,x_{2,3}+6\,x_{3,2}-2\,x_{3,3}+6\,x_{4,1}+12\,x_{4,2}+4\,x_{4,3}
\end{aligned}
$$

soggetto ai seguenti vincoli:

non negativitá $x_{i,j} \geq 0$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3$.

disponibilitá vari tipi di greggio

$$
\begin{aligned}
x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3} \leq 5000, \qquad & x_{2,1}+x_{2,2}+x_{2,3} \leq 2400, \\
x_{3,1}+x_{3,2}+x_{3,3} \leq 4000, \qquad & x_{4,1}+x_{4,2}+x_{4,3} \leq 1500.
\end{aligned}
$$

rispetto proporzioni specifiche qualitative

$$
\begin{aligned}
x_{2,1} &\geq 0.4\ (x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}+x_{4,1}) \\
x_{2,1} &\leq 0.5\ (x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}+x_{4,1}) \\
x_{3,2} &\geq 0.4\ (x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2}+x_{4,2}) \\
x_{2,3} &\leq 0.5\ (x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}+x_{4,3})
\end{aligned}
$$