Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Esame di Ricerca Operativa - 28 giugno 2010
Facoltà di Architettura - Udine

Problema 1 (4 punti):

La rete idrica del basso Tagliamento deve soddisfare il fabbisogno di tre centri abitati che richiedono giornalmente la seguente quantità d'acqua (in Gigalitri):

Flaibano	Sedegliano	Codroipo
50	80	290

I tre centri possono essere riforniti da due sorgenti S_1 e S_2, aventi capacità giornaliera di 160 e 310 Gl rispettivamente. Trasportare acqua da una sorgente a un centro comporta le perdite indicate nella seguente tabella (hl/Gl)

	Flaibano	Sedegliano	Codroipo
S_1	10	15	20
S_2	8	14	7

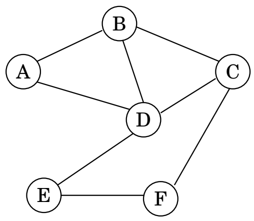
Formulare come PL il problema di pianificare il trasporto d'acqua ai tre centri abitati minimizzando le perdite. Si tenga presente che l'acquedotto dalla sorgente S_1 verso Codroipo porta massimo 150 Gl al giorno.

Problema 2 (2+2 punti):

Un Matching in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M. Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

Problema 3 (5 punti):
Un robot R deve portarsi dalla cella A–1 alla sua home H nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	●	·
B	·	·	·	●	●	·	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	●	·	·	·	●	·	·
E	·	·	·	●	·	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	·	·
G	·	·	·	●	·	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (●). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) partenza in A–1 ed arrivo in G–8, al robot viene richiesto di passare per D–5.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–8	
B–3 → G–8	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	

Problema 4 (4 punti):
Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = CCACAGAGGCTACCACG$ e $t = ACGCAGTCAGGAACGC$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'G'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = CAGGAACGC$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = CTACCACG$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'G'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

Problema 5 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

15	8	10	5	9	25	32	56	8	29	57	12	35	23	50	52	13	11	6	29	54	17	34	46	18

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 13. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
Z-sequenza		
crescente con 13		

Problema 6 (8 punti):

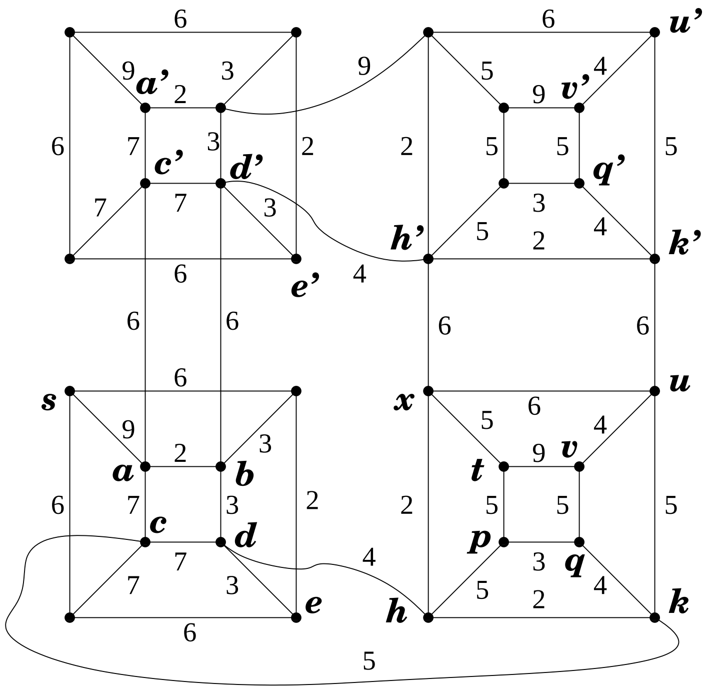
5.1**(1+1+1pt)** Costruire un problema di PL in forma standard il cui duale sia non ammissibile. Prova impiegando il minor numero di variabili possibili (nel primale). Prova impiegando il minor numero di vincoli possibili (nel duale).

5.2**(1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale abbia infinite soluzioni ottime e precisamente 4 soluzioni ottime di base.

5.3**(1+1pt)** Di queste 4 soluzioni ottime di base, precisamente 2 le vogliamo degeneri. Meglio se ci riesci introducendo una sola variabile nel primale.

5.4**(2pt)** Costruire un problema di PL in forma standard tale che sia esso che il suo duale siano non ammissibili.

Problema 7 (14 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco $h'x$ con un arco $q'x$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.4.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.5.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.8.**(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q.