

NOME: .....

COGNOME: .....

MATRICOLA: .....

FIRMA: .....

## Esame di Ricerca Operativa - 6 settembre 2007 Facoltà di Architettura - Udine

**Problema 1 (4 punti):**

Un'azienda di trasporto pubblico ha a disposizione un budget di 150 Keuro (150 mila euro) per pubblicizzare una sua iniziativa attraverso televisione e carta stampata. Un annuncio sui giornali costa 1 Keuro; si possono fare al massimo 30 annunci di questo tipo. Uno spot televisivo costa 10 Keuro; si possono fare al più 15 spot in totale (fino ad esaurimento del budget). Il numero di nuovi utenti che si possono raggiungere con i due media decresce con il numero di annunci, con la seguente regola:

| tipo        | fascia | nuovi contatti |
|-------------|--------|----------------|
| giornali    | 1-10   | 900            |
|             | 11-20  | 600            |
|             | 21-30  | 300            |
| televisione | 1-5    | 10000          |
|             | 6-10   | 5000           |
|             | 11-20  | 2000           |

Per esempio, decidendo di fare 12 annunci sui giornali e 8 spot televisivi si raggiungono 75.200 nuovi utenti (9000+1200 giornali; 50.000+15.000 televisione), con una spesa complessiva di  $12 + 80 = 92$  Keuro.

Si vuole massimizzare il numero di contatti, rispettando il budget complessivo di 150 Keuro.

Si formuli il problema mediante un modello di programmazione lineare intera.

**Problema 2 (4 punti):**

Sia  $B = 30$ . Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere  $B$ , sia massima

4, 21, 52, 11, 17, 21, 17, 21, 4, 27, 54, 6, 27, 28, 48, 6, 8, 21, 52

**2.1(1pt)** quale è il valore della somma massima? Quali elementi devo prendere?

**2.2 (1pt)** e nel caso  $B = 24$ ?

**2.3 (1pt)** e nel caso  $B = 26$ ?

**2.4 (1pt)** e nel caso  $B = 21$ ?

**Problema 3 (4 punti):**

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **minima**.

|    |    |     |    |     |    |     |   |    |    |     |    |     |    |     |    |     |   |     |    |     |   |    |    |    |    |    |
|----|----|-----|----|-----|----|-----|---|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|---|-----|----|-----|---|----|----|----|----|----|
| -3 | 13 | -41 | 31 | -16 | 12 | -27 | 5 | -9 | 12 | -48 | 46 | -21 | 34 | -11 | 55 | -27 | 8 | -54 | 30 | -23 | 9 | -5 | 10 | -8 | 15 | -1 |
|----|----|-----|----|-----|----|-----|---|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|---|-----|----|-----|---|----|----|----|----|----|

**3.1(1pt)** quale è il minimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

**3.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

**3.3 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

**3.4 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere il 15-esimo elemento?

**Problema 4 (4 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 25 | 18 | 20 | 15 | 19 | 33 | 40 | 64 | 18 | 37 | 65 | 21 | 44 | 31 | 56 | 58 | 22 | 19 | 15 | 37 | 60 | 26 | 41 | 51 | 23 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

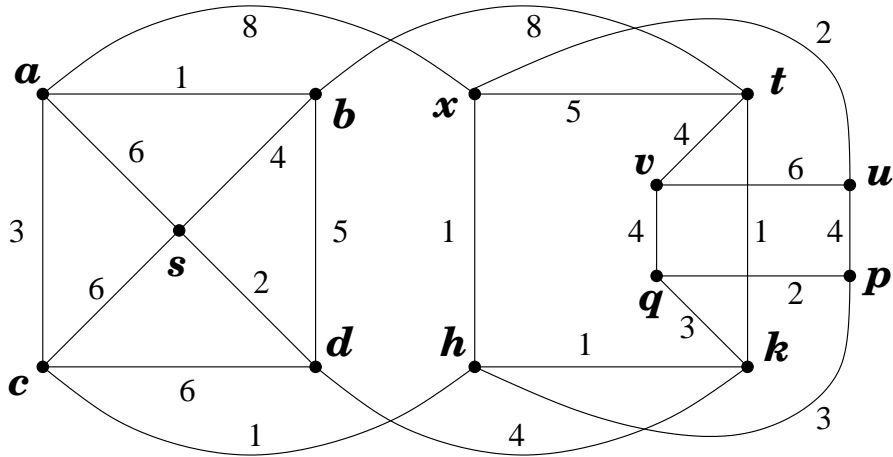
**4.1(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.2(2pt)** una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice  $i$  tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' $i$ -esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 21. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**Problema 5 (12 punti):**

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(4pt) Trovare un massimo flusso ed un taglio minimo. Disegnarli entrambi.
- 5.2.(2pt) Disegnare la rete ausiliaria associata al massimo flusso di cui al punto precedente. Evidenziare in essa i nodi raggiungibili dal nodo  $s$  ed il taglio associato.
- 5.3.(2pt) Il grafo rappresentato in figura è planare? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 5.4.(1pt) Il grafo rappresentato in figura è bipartito? Fornisci un certificato per la tua risposta.
- 5.5.(1pt) Quale è il numero minimo di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.
- 5.6.(2pt) Quale è il numero minimo di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito? Certifica la tua risposta.

**Problema 6 (6 punti):** Si consideri il seguente problema di PL.

$$\begin{cases} \max & 6x_1 - 3x_2 + 8x_3 \\ & 3x_1 & \leq & 9 \\ & & x_2 & \leq & 7 \\ & & & 2x_3 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

- 6.1(1pt) Fornire la soluzione ottima  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ .
- 6.2(1pt) Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo e terzo vincolo? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle tre risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a  $+\infty$ ? (Se vi è un limite, specificare quale).

- 6.3(1pt) Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinché la soluzione non sia più ottima?
- 6.4(1pt) Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.
- 6.5(1pt) È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.
- 6.6(1pt) Aggiungere un vincolo in modo che la soluzione ottima  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  individuata al primo punto resti ammissibile, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari non possano sicuramente più consentire di individuare univocamente una soluzione duale gemella.

### LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

#### PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito successivamente all'esame).

#### PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione **COMPLETA ed ESAURIENTE** dell'esercizio "in bella copia" deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Tutti i fogli consegnati, inclusa la copertina, debbono riportare NOME, COGNOME e MATRICOLA (sia per l'assegnazione dei punti che per il controllo).
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.

#### COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno resi disponibili sotto SINDI. Dal 18 in sù potete registrare il voto: basta che esprimiate il vostro consenso sotto SINDI. Ad alcuni di voi verrà richiesto di completare la prova scritta con un orale, ma costoro sono esonerati dal presentarsi a me per un orale qualora intendano comunque rifare lo scritto. I voti scadono dopo alcuni mesi (li garantiamo per 3 mesi) od alla consegna di un successivo scritto.