Esame di Ricerca Operativa - 30 settembre 2013
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un'azienda leader nel campo dell'elettronica deve organizzare una campagna pubblicitaria per il lancio di un nuovo cellulare. La campagna pubblicitaria è basata sull'uso della TV, della radio e di riviste settimanali: in particolare, trasmettere uno spot pubblicitario in TV nel primo pomeriggio costa 800 euro, trasmettere uno spot pubblicitario in TV in prima serata costa 1.100 euro, trasmettere uno spot pubblicitario alla radio costa all'azienda 300 euro, mentre pubblicare una pagina di pubblicità su una qualsiasi rivista settimanale costa all'azienda 500 euro. Nella seguente tabella sono riportate le stime del numero di potenziali acquirenti (espressi in migliaia e suddivisi per fascia di età, a partire da 15 anni) raggiungibili da ciascun tipo di messaggio pubblicitario:

	15-17 anni	18-25 anni	26-40 anni	41-60 anni	> 60 anni
TV pomeriggio	200	150	70	120	180
TV prima serata	250	140	130	300	350
Radio	100	120	120	140	170
Rivista	80	90	110	180	200

Ad esempio, se andasse in onda uno spot pubblicitario in TV nel pomeriggio, si stima che esso sarebbe visto da circa 150.000 persone di età compresa fra i 18 e i 25 anni, mentre un messaggio pubblicitario su una pagina di rivista settimanale raggiungerebbe circa 200.000 persone di età superiore a 60 anni. L'azienda deve decidere come organizzare la campagna pubblicitaria, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di pubblicità e tenendo conto dei seguenti vincoli: (1) per ciascuna fascia di età, la copertura non é inferiore a due milioni di esposizioni al messaggio pubblicitario; (2) la quantità di spot trasmessi alla radio non deve superare il 50% degli spot trasmessi in TV; (3) la spesa complessiva sostenuta per la pubblicità su riviste non deve superare il 50% della spesa complessiva sostenuta per trasmettere gli spot in TV. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

svolgimento.

Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{TP} = quantità di spot mandati in TV di pomeriggio;
- x_{TS} = quantità di spot mandati in TV di sera;
- x_{RAD} = quantità di spot mandati alla radio;
- x_{RIV} = quantità di spot collocati su rivista.

Stiamo supponendo per semplicità che tali variabili non siano vincolate ad essere intere: anche se ovviamente tale ipotesi é disdetta dalla realtá, la prassi sará quella di arrotondare al prossimo intero superiore i valori frazionari della soluzione ottima restituita dall'LP solver. Questo ovviamente introduce un'imprecisione e non consente di garantire l'ottimalitá della soluzione intera ottenuta con questo processo, ma in casi come questo l'imprecisione é contenuta e solitamente considerata trascurabile. L'obiettivo é quello di minimizzare l'esborso in pubblicitá, ossia

$$\min 800\, x_{TP} + 1100\, x_{TS} + 300\, x_{RAD} + 500\, x_{RIV}\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_{TP}, x_{TS}, x_{RAD}, x_{RIV} \geq 0.$$

vincoli (1) di raggiungimento massa critica su ciascuna categoria

$$\begin{aligned}
200\,x_{TP} + 250\,x_{TS} + 100\,x_{RAD} + 80\,x_{RIV} &\geq 2000\\
150\,x_{TP} + 140\,x_{TS} + 120\,x_{RAD} + 90\,x_{RIV} &\geq 2000\\
70\,x_{TP} + 130\,x_{TS} + 120\,x_{RAD} + 110\,x_{RIV} &\geq 2000\\
120\,x_{TP} + 300\,x_{TS} + 140\,x_{RAD} + 180\,x_{RIV} &\geq 2000\\
180\,x_{TP} + 350\,x_{TS} + 170\,x_{RAD} + 200\,x_{RIV} &\geq 2000
\end{aligned}$$

vincolo (2) sul bilanciamento uso mediatico

$$0.5\,x_{TP} + 0.5\,x_{TS} - \,x_{RAD} \geq 0$$

vincolo (3) sul bilanciamento di spesa

$$800\,x_{TP} + 1100\,x_{TS} - 500\,x_{RIV} \geq 0$$

Introducendo il vincolo di interezza per le 4 variabili $x_{TP}, x_{TS}, x_{RAD}, x_{RIV}$ otteniamo una piú fedele rappresentazione del problema in termini di PLI.

Problema 2 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s =$ A B D B D C D C C B A D A B D B C e $t =$ D B C A D C A B D C C D A B C B. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

2.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'A'?

2.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 =$ D B C A D C A B D di t?

2.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 =$ A B D B D C D C di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'A'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s ⌒	-	D	B	C	A	D	C	A	B	D	C	C	D	A	B	C	B
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
D	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
B	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
D	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
C	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
D	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
C	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
C	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
B	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
A	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
D	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
A	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
B	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
D	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
B	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
C	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	D B D C D C C D A B C
termina con 'A'	9	D B D C D C C D A
tra s e t_9	8	D B C D C A B D
tra s_8 e t	7	B D B D C D C

Problema 3 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13

3.1(2pt) Esprimere come un problema di massima sottosequenza comune tra due sequenze opportunamente costruite il problema di trovare una sottosequenza crescente di S che sia la più lunga possibile.

3.2(2pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Esprimere come un problema di massima sottosequenza comune tra due sequenze opportunamente costruite il problema di trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data S.

risposte.

3.1(2pt) Si ricerchi la massima sottosequenza comune tra S e SORT(S), la sequenza che si ottiene mettendo in ordine crescente gli elementi di S.

3.2(2pt) Si ricerchi la massima sottosequenza comune tra S e $\mathrm{SORT}^R(S)\mathrm{SORT}(S)$, dove $\mathrm{SORT}^R(S)\mathrm{SORT}(S)$ é la concatenazione tra $\mathrm{SORT}(S)$ e $\mathrm{SORT}^R(S)$, e $\mathrm{SORT}^R(S)$ é la sequenza che si ottiene mettendo in ordine decrescente gli elementi di S.

Problema 4 (8 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un pedaggio che viene pagato dal robot se passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al minimizzare il costo complessivo della traversata.

4.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

4.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

4.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

4.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

4.5(2pt) Quale é il minimo costo di una traversata da A–1 a G–9?

4.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che comportano questo costo minimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	250	149	80	36	14	14	14	4	•
B	101	69	44	22	•	•	10	4	1
C	32	25	22	22	16	11	6	3	1
D	7	3	•	6	5	5	3	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	•	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	•	•	194
G	1	7	18	44	•	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

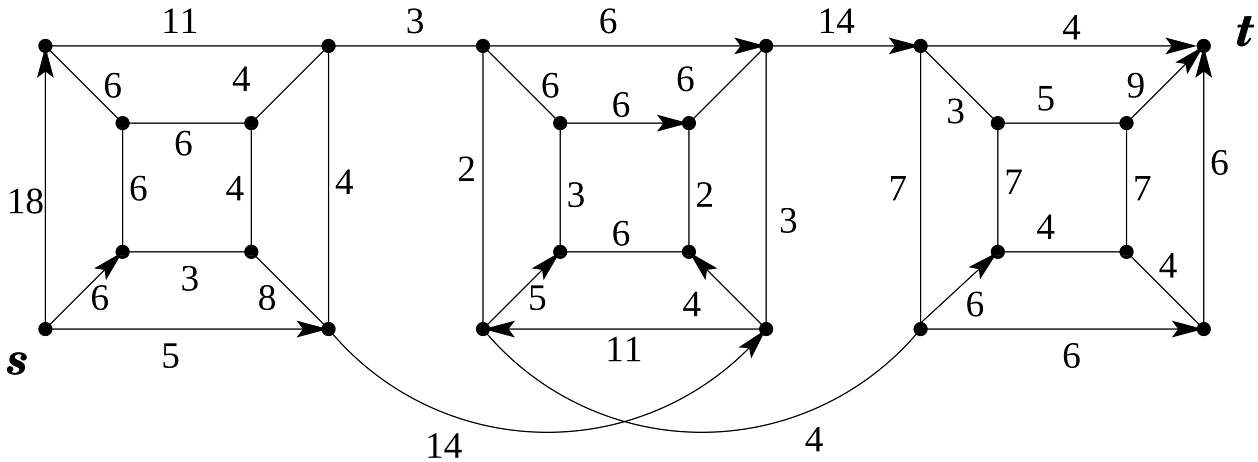
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0_1	1_1	4_1	4_1	5_1	6_1	6_1	6_1	•
B	2_1	3_1	3_1	3_1	•	•	6_1	6_2	6_2
C	4_1	5_1	3_1	4_2	4_2	4_2	5_2	6_2	7_4
D	4_1	4_1	•	4_2	4_4	4_6	5_6	5_6	5_6
E	4_1	4_2	5_2	5_2	•	5_6	5_{12}	5_{18}	5_{24}
F	4_1	5_3	6_5	6_2	6_2	6_6	•	•	6_{24}
G	7_1	8_3	6_5	7_7	•	6_6	6_6	7_6	6_{24}

Leggendo i valori riportati nella cella G–9 scopriamo che il minimo costo di una traversata é di 6, e che esistono 24 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	250
B–3 → G–9	44
A–1 → F–6	56
passaggio per D–5	100
minimo costo	6
numero di min-cost paths	24

Problema 5 (13 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.3.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.4.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

5.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

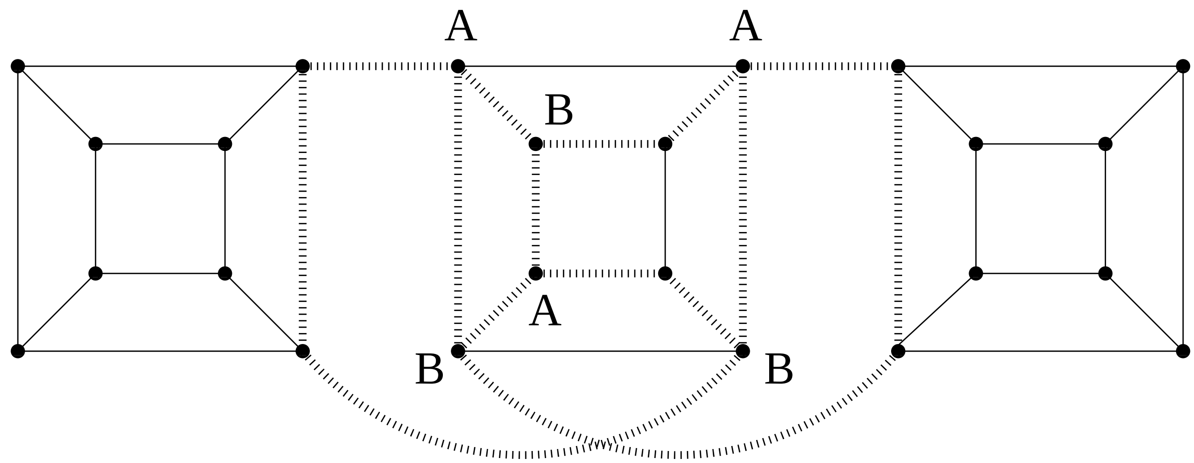
5.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

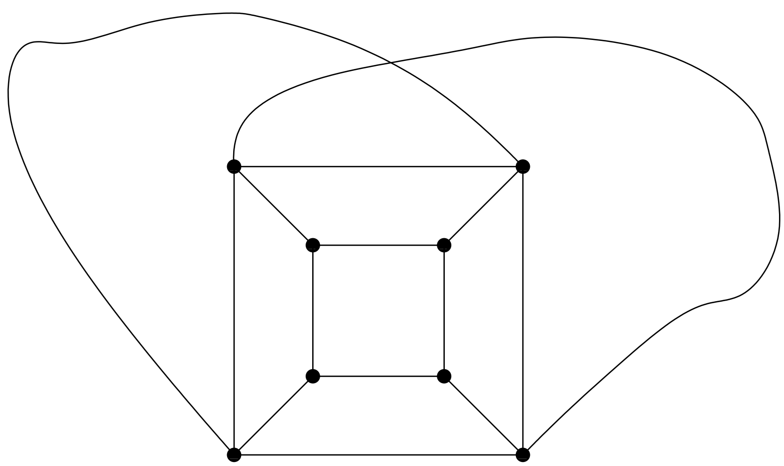
5.8.**(2pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato (1pt) del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato (1pt) del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.

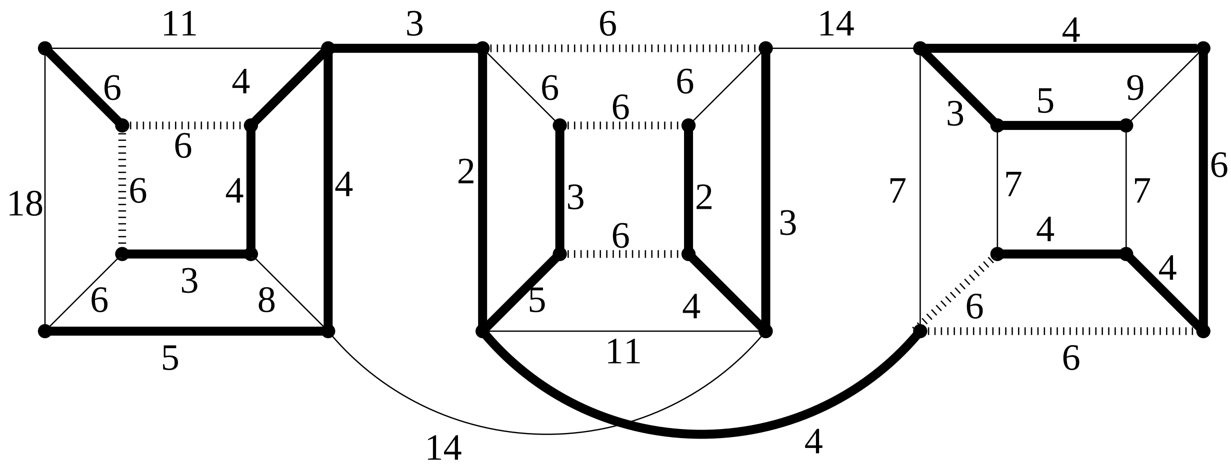


Nella ricerca di tale certificato (o di un planar embedding), poteva sicuramente aiutare la considerazione che G è planare se e solo se lo è anche il seguente grafo G'.

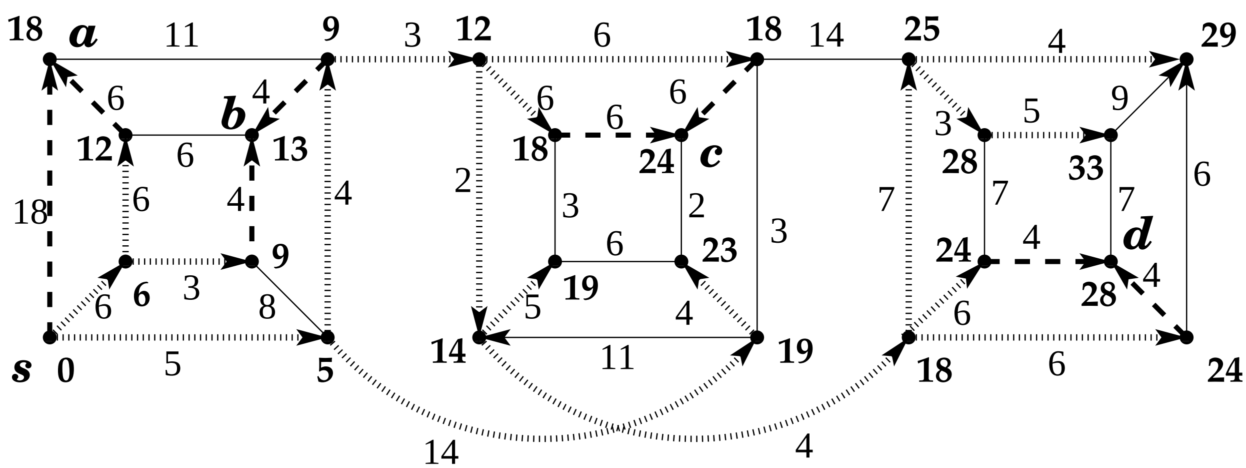


Tale grafo non sembra planare, e tuttavia non può contenere una suddivisione di K_5 visto che ha solo 4 nodi di grado almeno 4. Si era quindi indotti alla ricerca di una suddivisione di $K_{3,3}$. Una volta trovata una suddivisione di $K_{3,3}$ in G' era facile derivarne una suddivisione di $K_{3,3}$ in G.

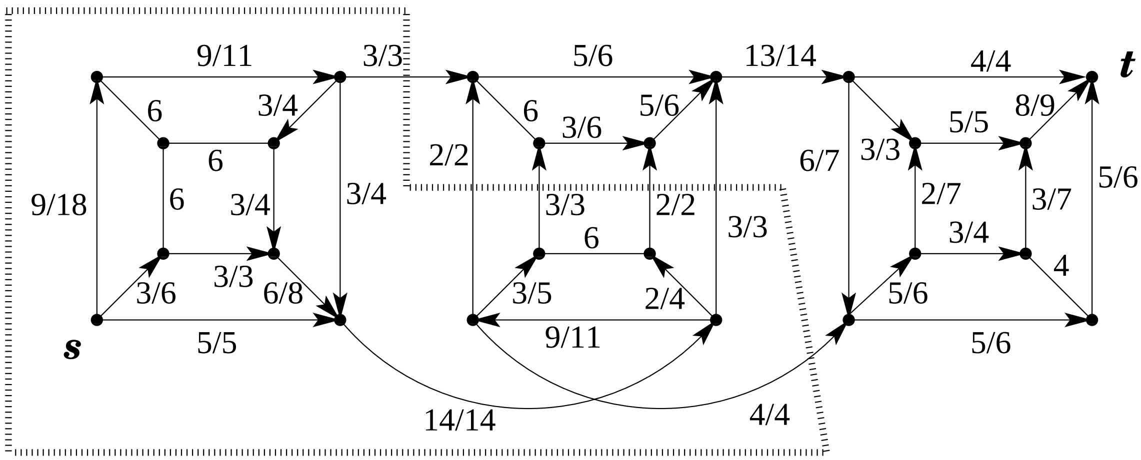
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 12 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra, più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^4 = 16$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 19 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo b, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo c e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo d.

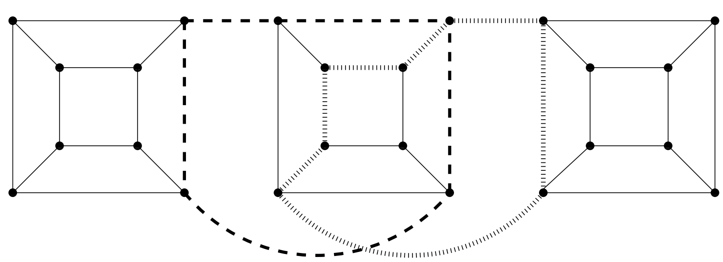


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

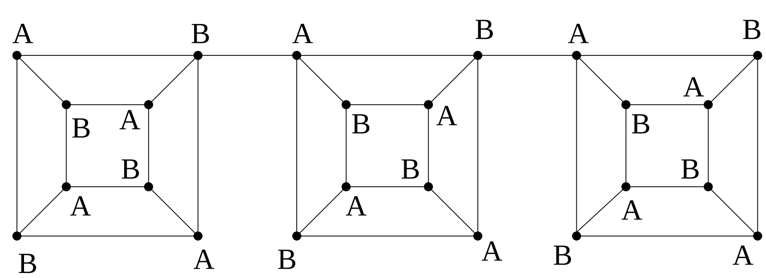


Il flusso ha valore 17 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 17 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Occorre rimuovere almeno 2 archi per rendere G bipartito dato che esso contiene 2 circuiti dispari disgiunti sugli archi come evidenziato in figura.



Di converso, con la rimozione di 2 soli archi possiamo rendere G bipartito come evidenziato in figura.



Problema 6 (6 punti):

$$\max\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 4x_3 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(2pt) Risolvere con il metodo del simplesso.

6.2(1pt) Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo vincolo?

6.3(2pt) E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per il primo vincolo?

6.4(1pt) Di quanto dovremmo alterare il secondo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

6.1 Risoluzione con il metodo del simplesso:

Il problema è in forma canonica e pertanto gli corrisponde il primo dei seguenti tre tableau. Il problema è ad origine ammissibile e pertanto impiego il metodo del simplesso primale per giungere al tableau ottimo.

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ w_1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ w_2 & 3 & \boxed{1} & -1 & 12 \\ z & -8 & -6 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & x_1 & w_2 & x_3 & \\ w_1 & 1 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ x_2 & 3 & 1 & -1 & 12 \\ z & 10 & 6 & -8 & 72 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & x_1 & w_2 & w_1 & \\ x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 13 \\ z & 12 & 6 & 2 & 80 \end{array}$$

Pertanto la soluzione ottima è $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$. Ad essa corrisponde un valore di 80 della funzione obiettivo.

6.2 I valori delle variabili duali (prezzi ombra) sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$. Pertanto:

per ogni unità di incremento nel termine noto del primo vincolo sono disposto a pagare massimo 2.

per ogni unità di incremento nel termine noto del secondo vincolo sono disposto a pagare massimo 6.

Si noti come una rapida verifica dell'ammissibilità delle soluzioni primale ($x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$) e duale ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$) consentirebbe a questo punto di assicurarsi della correttezza dei risultati fin qui prodotti.

6.3 Tuttavia le indicazioni fornite dai prezzi ombra (λ_1 e λ_2) valgono solo per piccoli incrementi. Per scoprire fino a quali entità di incremento tali valori ombra restano indicativi passiamo a considerare il duale. Il tableau del duale all'ottimo può essere ottenuto dal tableau primale all'ottimo come segue:

$$\underset{\textsc{Tableau Primale}}{\begin{array}{c|cccc} & x_1 & w_2 & w_1 & \\ x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 13 \\ z & 12 & 6 & 2 & 80 \end{array}} \Longleftrightarrow \underset{\textsc{Tableau Duale}}{\begin{array}{c|ccc} & y_3 & y_2 & \\ y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 12 \\ \lambda_2 & 0 & -1 & 6 \\ \lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\ z & -1 & -13 & 80 \end{array}}$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale è che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è l'ultima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della PROVA DI CONTROLLO (prova del nove) della PL.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & (0) & (0) & (0) \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & y_3 & y_2 & \\
(0) \to y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 12 \\
(12) \to \lambda_2 & 0 & -1 & 6 \\
(4+D) \to \lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\
z & -1 & -13 & 80
\end{array}
$$

Ricordiamo che per ogni colonna vale quanto segue: il valore dell'ultimo elemento della colonna si ottiene sommando gli altri elementi della colonna ciascuno moltiplicato per il coefficiente della riga cui appartiene e sottraendo infine il valore del coefficiente associato alla colonna.

Colonna 1: $-\frac{1}{4}(0) + 0(12) - \frac{1}{4}(4+D) - (0) = -1 - \frac{D}{4}$
Colonna 2: $-\frac{13}{4}(0) - 1(12) - \frac{1}{4}(4+D) - (0) = -13 - \frac{D}{4}$
Colonna 3: $12(0) + 6(12) + 2(4+D) - (0) = 80 + 2D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-1 - \frac{D}{4} \qquad -13 - \frac{D}{4} \qquad 80 + 2D$$

Si noti come, ponendo $D = 0$, si ritrovi in effetti la corrispondente riga z del tableau duale di cui sopra. Quindi abbiamo implicitamente condotto la prova di controllo relativamente a quel tableau. L'esito di tale verifica è stato positivo e quindi possiamo concludere sia per la correttezza dei singoli coefficienti dei tableau fin qui prodotti sia per la congruità con cui la prova di controllo è stata condotta.

Tornando al nostro obiettivo, dobbiamo individuare in quale intervallo per il parametro D i primi due termini della riga sopra computata rimangano tutti non positivi. La risposta è che tale condizione risulta rispettata nell'intervallo $D \geq -4$. Il tableau considerato resta pertanto ottimo se e solo se $D \geq -4$. Possiamo concludere che non vi è alcun limite al quantitativo di diponibilità sul primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 2 per ogni unità di incremento. Inoltre, in caso di liquidazione di tale disponibilità, il prezzo a cui vendere sarebbe 2 solo per le prime 4 unità vendute ma dovrebbe poi essere rivisto verso l'alto. Si noti tuttavia che la quantità disponibile nel problema di partenza era proprio 2, e quindi, per quel prezzo, siamo disposti ad arrivare fino ad esaurimento della quantità di risorsa disponibile (ma, anche ove fosse possibile, non risulterebbe conveniente andare in carenza di quella risorsa a quel prezzo).

6.4 Nel analizzare la sensitività della soluzione ottima rispetto a modifiche dei coefficienti della funzine obiettivo conviene invece riferirsi al primale.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & (8) & (0) & (0) & (0) \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & x_1 & w_2 & w_1 & \\
(2) \to & x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
(6+D) \to & x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\
 & z & 12 & 6 & 2 & 20
\end{array}
$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $\frac{1}{4}(2) + \frac{13}{4}(6 + D) - (8) = 12 + \frac{13}{4}D$
Colonna 2: $0(2) + 1(6 + D) - (0) = 6 + D$
Colonna 3: $\frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(6 + D) - (0) = 2 + \frac{1}{4}D$
Colonna 4: $\frac{1}{4}(2) + \frac{13}{4}(6 + D) - (0) = 20 + \frac{13}{4}D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$12 + \frac{13}{4}D \quad 6 + D \quad 2 + \frac{1}{4}D \quad 20 + \frac{13}{4}D$$

L'intervallo dei valori di D per i quali il tableau indicato resta ottimo coincide con l'intervallo dei valori di D per i quali ciascuno dei primi tre termini della riga sopra computata rimane non negativo. Pertanto il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -\frac{48}{13}$, ossia, la soluzione considerata ($x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$.) resta ottima fintantochè $D \geq -\frac{48}{13}$.