Esame di Ricerca Operativa - 16 settembre 2013
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

La Loamed è un'azienda che produce snack. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Loamed produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
Mem	solo arachidi	260
Num	non piú del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	400
Pe	solo pistacchi	510
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	520

Supponendo che tutto quanto prodotto venga venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Loamed. Indicare poi dove l'eventuale aggiunta di qualche vincolo di interezza possa lievemente aumentare la precisione del modello.

svolgimento.

Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{AM} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Mem;
- x_{AN} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{MN} = quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{NN} = quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{PN} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Num;
- x_{PP} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Pe;
- x_{AQ} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{MQ} = quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{NQ} = quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{PQ} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Qof;
- y_M = numero di scatole di snack di tipo Mem prodotte;
- y_N = numero di scatole di snack di tipo Num prodotte;
- y_P = numero di scatole di snack di tipo Pe prodotte;
- y_Q = numero di scatole di snack di tipo Qof prodotte.

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili y_i non siano vincolate ad essere intere. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei quattro tipi di confezioni ossia

$$\max R \quad = \quad 260\, y_M + 400\, y_N + 510\, y_P + 520\, y_Q\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$y_M, y_N, y_A, y_B, x_{AM}, x_{AN}, x_{MN}, x_{NN}, x_{PN}, x_{PP}, x_{AQ}, x_{MQ}, x_{NQ}, x_{PQ} \geq 0.$$

vincoli sulla composizione

$$\begin{aligned}
x_{AM} &= 0,5\, y_M \\
x_{AN} + x_{MN} + x_{PN} + x_{NN} &= 0,5\, y_N \\
x_{PP} &= 0,5\, y_P \\
x_{AQ} + x_{MQ} + x_{NQ} + x_{PQ} &= 0,5\, y_Q \\
x_{AN} &\leq 0,25\, y_N \\
x_{MN} &\geq 0,05\, y_N \\
x_{PN} &\geq 0,075\, y_N \\
x_{MQ} &\geq 0,1\, y_Q \\
x_{NQ} &\geq 0,15\, y_Q \\
x_{PQ} &\geq 0,15\, y_Q
\end{aligned}$$

disponibilitá di materie prime

$$\begin{aligned}
x_{AM} + x_{AN} + x_{AQ} &\leq 550 \\
x_{PP} + x_{PN} + x_{PQ} &\leq 150 \\
x_{MN} + x_{MQ} &\leq 90 \\
x_{NN} + x_{NQ} &\leq 70
\end{aligned}$$

Ovviamente i vincoli di non negativitá $y_M, y_N, y_A, y_B \geq 0$ possono essere omessi. Introducendo il vincolo di interezza per le sole 4 variabili y_M, y_N, y_A e y_B otteniamo soluzioni intere ottime che possono essere messe in pratica senza arrotondamenti (con conseguente rischio di perdita di precisione nella soluzione del modello matematico intero).

Problema 2 (6 punti):
Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\max\ x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 11x_4 + 5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_3 + x_4 + x_6 \leq 10 \\ x_5 + x_6 \leq 14 \\ x_1 + 2\,x_3 + x_5 + 2\,x_6 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

2.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

2.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

2.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

2.5.**(2pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) + (0) = 11 \leq 12 \\ (0) + (10) + (0) = \mathbf{10} \leq 10 \\ +(14) + (0) = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + 2\cdot(0) + (14) + 2\cdot(0) = \mathbf{20} \leq 20 \\ (5) + (10) + (0) = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 12\,y_1 + 10\,y_2 + 14\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 6 \\ y_1 + y_2 + 2\,y_4 \geq C_3 \\ y_2 + y_5 \geq 11 \\ y_3 + y_4 \geq 5 \\ y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} y_4 = 1 \\ y_5 = 6 \\ y_2 + y_5 = 11 \\ y_3 + y_4 = 5 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 5, 4, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottina se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_1 + y_2 + 2y_4 = 7 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 = 17 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 7$ e $C_6 \leq 17$.

Problema 3 (4 punti): Si costruisca (o si argomenti che non puó esistere) un problema di PL in forma standard con:

3.1.**(1pt)** precisamente 8 soluzioni di base, e tutte e 8 ottime.

3.2.**(1pt)** delle soluzioni non-ottime ma tutte le soluzioni di base ottime.

3.3.**(1pt)** una sola soluzione di base ottima ma almeno due soluzioni ottime non di base.

3.4.**(1pt)** nessuna soluzione di base ammissibile ma una soluzione ottima degenere per il duale.

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 7. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
1	1	2	3	3	1	1	1	3	2	1	3	2	3	4	2	5	6	7	3	5	7	3	3	3	4
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$

DECRESCENTE

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
1	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**6**	**7**	**6**	**5**	**3**	**7**	**7**	**5**	**8**	**9**	**10**	**8**
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	10	1, 2, 4, 5, 9, 19, 25, 29, 39, 44
decrescente	7	48, 32, 19, 12, 10, 7, 6
V-sequenza	11	48, 32, 19, 12, 10, 7, 3, 25, 29, 39, 44
crescente con 7	9	1, 2, 4, 5, 7, 11, 29, 39, 44

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 5 (4 punti):

Con riferimento al Problema 4 qui sopra, come potresti fare a determinare il numero di sequenze ottime ai punti 4.1 e 4.4 avvalendoti della programmazione dinamica? Costruisci le tabelle e fornisci in esplicito il numero di soluzioni ottime ai punti 4.1 e 4.4.

hint alla soluzione. (Come al solito meglio provare a risolvere prima in autonomia, provando prima anche senza leggere l'hint).

Per ogni posizione i della sequenza in input, oltre ai due problemi:

P_i la massima lunghezza di una sottosequenza crescente che parta proprio includendo l'elemento i-esimo della sequenza in input;

T_i la massima lunghezza di una sottosequenza crescente che termini proprio con l'elemento i-esimo della sequenza in input;

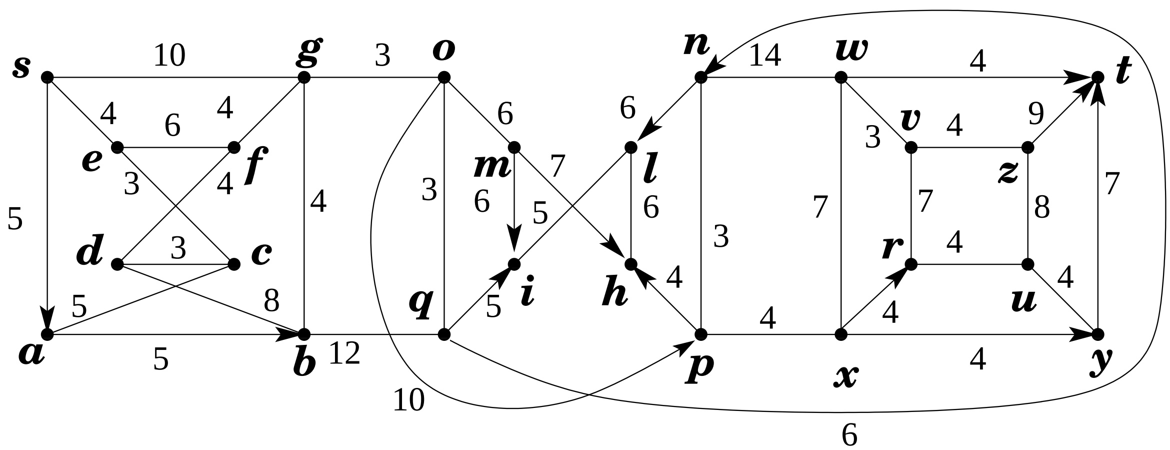
utili per rispondere alla domanda 4.1 (P_i) ed alla domanda 4.4 ($P_i + T_i$) si considerino anche, i due problemi:

$\#P_i$ numero di sottosequenze crescenti della sequenza in input che partano con l'elemento i-esimo come loro primo elemento e con lunghezza massima (ossia di P_i elementi);

$\#T_i$ numero di sottosequenze crescenti della sequenza in input che terminino proprio con l'elemento i-esimo della sequenza in input come loro ultimo elemento e con lunghezza massima (ossia di T_i elementi).

Problema 6 (14 punti):

Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



6.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

6.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi.

6.4.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.5.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

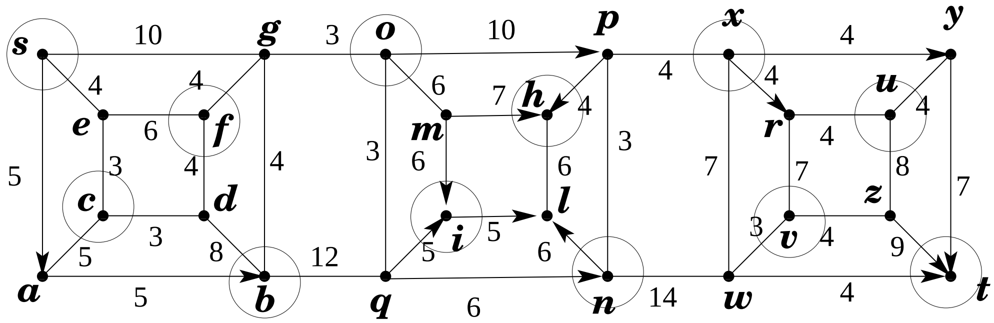
6.6.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.7.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, ef, om.

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

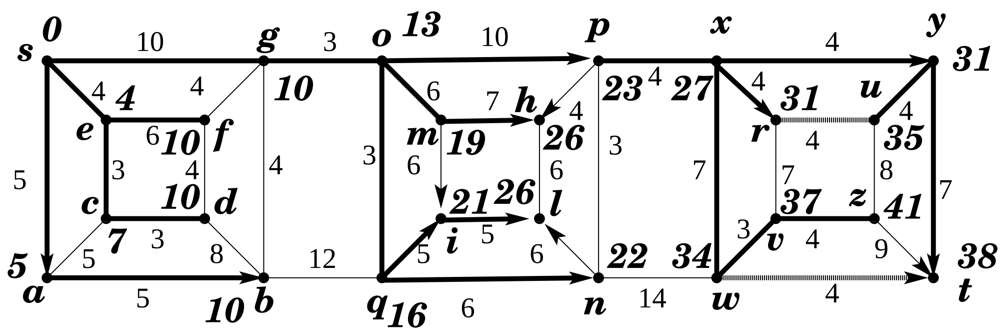
6.9.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.

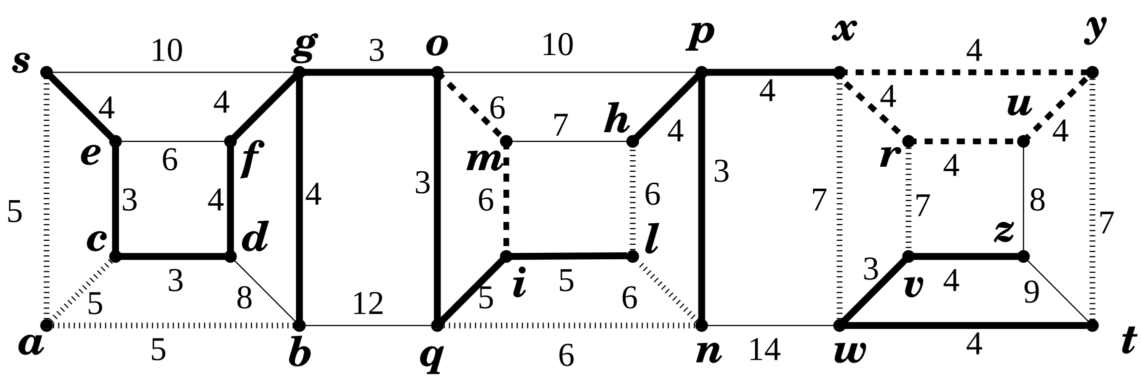


Nella stessa figura é inoltre fornito un certificato di bipartizione.

Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.

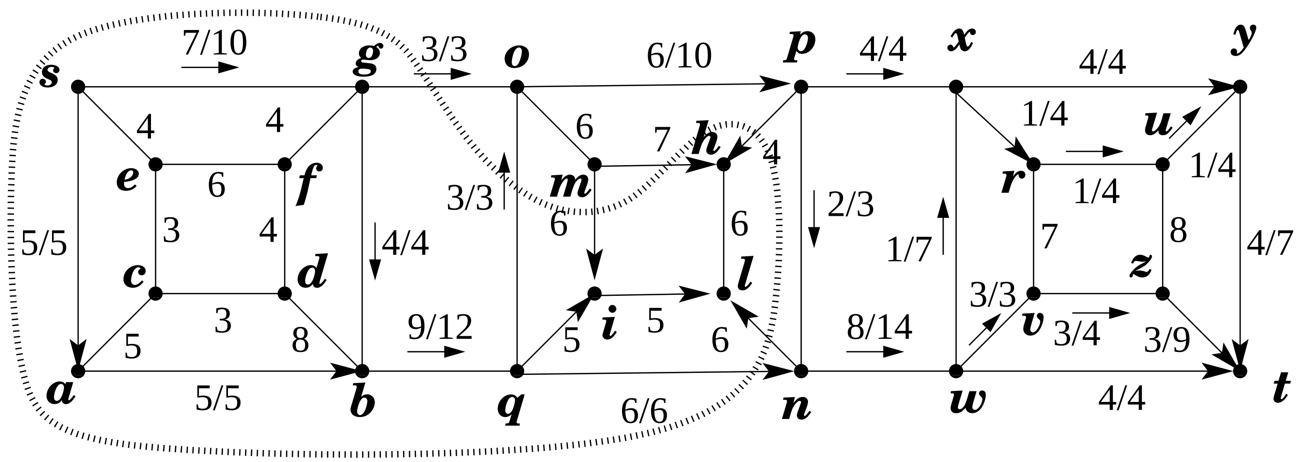


fg in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi s, e, a, c, f, d da tutti gli altri nodi;

ef in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $ecdf$;

om in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio composto dagli archi op, om, mi, hl, ln e qn (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $oqim$.

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s, t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.