Esame di Ricerca Operativa - 3 settembre 2012
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (8 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella E–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	3	0	1	1	0	0	•
B	2	0	0	•	•	0	1	0
C	0	1	1	•	1	0	0	0
D	1	1	1	0	1	•	•	1
E	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuo se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in E–3?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in E–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(1pt) Quale é il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A–1 a E–8?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella E–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	15	9	6	5	5	5	2	•
B	6	3	1	•	•	3	2	1
C	3	2	1	•	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1	•	•	1
E	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	•	•	1	2	2
C	1	3	6	•	0	1	3	5
D	1	4	10	10	10	•	•	5
E	1	5	15	•	10	10	10	15

Ritrovare il valore 15 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è

ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0_1	3_1	3_1	4_1	5_1	5_1	5_1	$\bullet$
B	2_1	3_1	3_2	$\bullet$	$\bullet$	5_1	6_2	6_2
C	2_1	4_1	5_1	$\bullet$	0	5_1	6_2	6_2
D	3_1	5_1	6_2	6_2	7_2	$\bullet$	$\bullet$	7_2
E	6_1	6_1	7_3	$\bullet$	7_2	7_2	8_2	8_2

Leggendo i valori riportati nella cella E–8 scopriamo che il massimo valore raccoglibile dal robot lungo la sua traversata é di 8, e che esistono 2 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → E–8	15
B–3 → E–8	1
A–1 → E–3	15
passaggio per D–5	10
massimo valore	8
numero di max-val paths	2

Problema 2 (4 punti):

Un'azienda chimica produce quattro tipi di solvente, A, B, C, D, miscelando 3 materie prime M_1, M_2 ed M_3 in acqua. Riportiamo in tabella le quantità, in kg, di materie prime che trovano impiego nel produrre un kg di ciascun tipo di solvente.

	M_1	M_2	M_3
A	0.2	0.4	0.3
B	0.3	0.1	0.3
C	0.2	0.3	0.4
D	0.2	0.3	0.2

Per il prossimo mese sono stati acquistati 1000, 1500 e 750 Kg di M_1 , M_2 e M_3 , rispettivamente. Nella tabella seguente sono riportati rispettivamente i profitti netti (in Euro per kg di prodotto) di vendita per ogni tipo di solvente.

	A	B	C	D
Profitto	7	7.3	7.4	8

Formulare come problema di Programmazione Lineare (PL) il problema di pianificare la produzione del prossimo mese in modo da massimizzare il profitto, sapendo che la quantità di solvente A richiesta è di almeno 100kg, mentre la quantità di solvente D prodotta non deve essere superiore a 400kg e la quantità di acqua impiegata non può eccedere i 500kg.

svolgimento.

Per $i = A, B, C, D$ indichiamo con x_i la quantitá di solvente i (espressa in kg) da prodursi. Quindi $x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0$. Il nostro desiderio di massimizzare i profitti trova espressione nella funzione obbiettivo:

$$\min 7\,x_A + 7.3\,x_B + 7.4\,x_C + 8\,x_D\,.$$

Restano da esprimere i seguenti vincoli.

vincoli sulla disponibilitá di materiali:

$$0.2\,x_A + 0.3\,x_B + 0.2\,x_C + 0.2\,x_D \leq 1000 \text{ (quantitá di } M_1 \text{ disponibile)}$$

$$0.4\,x_A + 0.1\,x_B + 0.3\,x_C + 0.3\,x_D \leq 1500 \text{ (quantitá di } M_2 \text{ disponibile)}$$

$$0.3\,x_A + 0.3\,x_B + 0.4\,x_C + 0.2\,x_D \leq 750 \text{ (quantitá di } M_3 \text{ disponibile)}$$

vincolo sulla disponibilitá di acqua:

$$(1-0.2-0.4-0.3)\,x_A + (1-0.3-0.1-0.3)\,x_B + (1-0.2-0.3-0.4\,x_C + (1-0.2-0.3-0.2)\,x_D \leq 500$$

ossia:

$$0.1\,x_A + 0.3\,x_B + 0.1\,x_C + 0.3\,x_D \leq 500 \text{ (quantitá di acqua disponibile)}$$

In pratica ciascuno dei 4 coefficienti per l'acqua viene ottenuto sottraendo ad 1 i 3 coefficienti relativi alla stessa variabile (stessa colonna) nei 3 vincoli sulla disponibilitá di materiali (vincoli subito sopra).

richieste sulla produzione:

$$x_A \geq 100, x_D \leq 400\,.$$

É bene inoltre non dimenticare di esprimere i vincoli di non-negativitá.

$$x_i \geq 0 \text{ per ogni } i = A, B, C, D.$$

Problema 3 (2+2 punti):

I numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sono nostri amici e, con una mail, desideriamo invitarli ad una festa. Conosciamo gli indirizzi delle seguenti mailing list: $L_1 = \{1, 2, 3\}$, $L_2 = \{1, 5, 6\}$, $L_3 = \{3, 4, 5\}$, $L_4 = \{1, 4, 7\}$, $L_5 = \{2, 5, 7\}$, $L_6 = \{3, 6, 7\}$, $L_7 = \{2, 4, 5\}$, $L_8 = \{1, 8\}$, $L_9 = \{7, 8\}$.

Siamo interessati a far pervenire la mail di invito a ciascun amico, minimizzando pero' il numero totale di mailing lists impiegate.

(2pt) Esprimere come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il nostro piccolo problema di ottimizzazione combinatoria.

(2pt) Indicare come vada espresso in generale il problema del SetCover in cui, data in input una famiglia $L_1, L_2, \ldots, L_m$ di sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, n\}$, viene chiesto di individuare un sottoinsieme S di minima cardinalità di $\{1, 2, \ldots, m\}$ tale che per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esista un $j \in S$ tale che $i \in L_j$.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \ldots, 9$, con l'idea che $x_i = 1$ significa "inviare alla mailing list L_i".

Volendo minimizzare il numero di mailing lists impiegate, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min \sum_{i=1}^{9} x_i$$

Poichè desideriamo che tutti gli amici siano raggiunti dalla mail, abbiamo i seguenti vincoli.

amico 1: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1;$

amico 2: $x_1 + x_5 + x_6 \geq 1;$

amico 3: $x_3 + x_4 + x_5 \geq 1;$

amico 4: $x_1 + x_4 + x_7 \geq 1;$

amico 5: $x_2 + x_5 + x_7 \geq 1;$

amico 6: $x_3 + x_6 + x_7 \geq 1;$

amico 7: $x_2 + x_4 + x_5 \geq 1;$

amico 8: $x_1 + x_8 \geq 1;$

amico 9: $x_7 + x_8 \geq 1.$

Nel caso di un'istanza di SetCover generica, come specificata dal testo dell'esercizio, introduciamo una variabile $x_j \in \{0,1\}$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, m$, con l'idea che $x_j = 1$ significa $j \in S$. (In altre parole x vorrebbe essere il vettore caratteristico del sottoinsieme S di $\{1, 2, \ldots, m\}$).

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema del SetCover di minima cardinalitá.

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{m} x_j \;, \\ &\sum_{j: i \in S_j} x_j \geq 1 \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, m, \\ &x_j \in \{0,1\} \qquad \text{per ogni } j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

34	27	29	24	28	44	51	55	27	48	56	31	54	42	69	71	32	30	25	47	70	36	53	67	37

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 32. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	27, 29, 44, 51, 55, 56, 69, 71
Z-sequenza	12	27, 29, 44, 51, 55, 56, 69, 71, 32, 47, 53, 67
crescente con 32	7	24, 28, 31, 32, 47, 53, 67

Problema 5 (7 punti):

Progettare un problema di PL in forma standard (od argomentare che esso non esista) tale che:

5.1 (2pt) ha esattamente 3 soluzioni di base ottime;

5.2 (2pt) ha infinite soluzioni ottime ma nessuna di esse é di base;

5.3 (1pt) il duale ha una soluzione degenere;

5.4 (1pt) il duale ha almeno 2 soluzioni di base ottime.

5.5 (1pt) il duale ha come unica soluzione ottima la soluzione degenere $y_1 = 1$, $y_2 = 1$.

svolgimento.

(5.1) occorre ragionare geometricamente: per avere tre spigoli ottimi nel politopo occorre essere in 3 dimensioni, ed avere una faccia (di fatto un triangolo) tutta di soluzioni ottime. Quindi,

$$\max \ x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 \ \leq \ 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(5.2) non esiste un tale problema in forma standard poiché il teorema fondamentale della programmazione lineare afferma che ogni problema in forma standard con soluzione ottima dovrá avere almeno una soluzione ottima di base. (Quella su cui siede il simplesso quando termina).

(5.3+5.4) se al problema sopra aggiungiamo un vincolo come segue:

$$\max \ x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 \ \leq \ 1 \\ x_3 \ \leq \ 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

allora la soluzione ottima di base nel punto $(0, 0, 1)$ diviene degenere poiché poggia anche sul vincolo aggiunto.

Ora si risolvono 5.3 e 5.4 contemporaneamente se di questo problema si scrive il duale. (Poiché il duale del duale é sempre il primale).

(5.5) Conviene scrivere prima il duale in modo che aderisca ai requisiti e poi farne il duale per ottenere il primale come richiesto.

Problema 6 (7 punti):

6.1**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

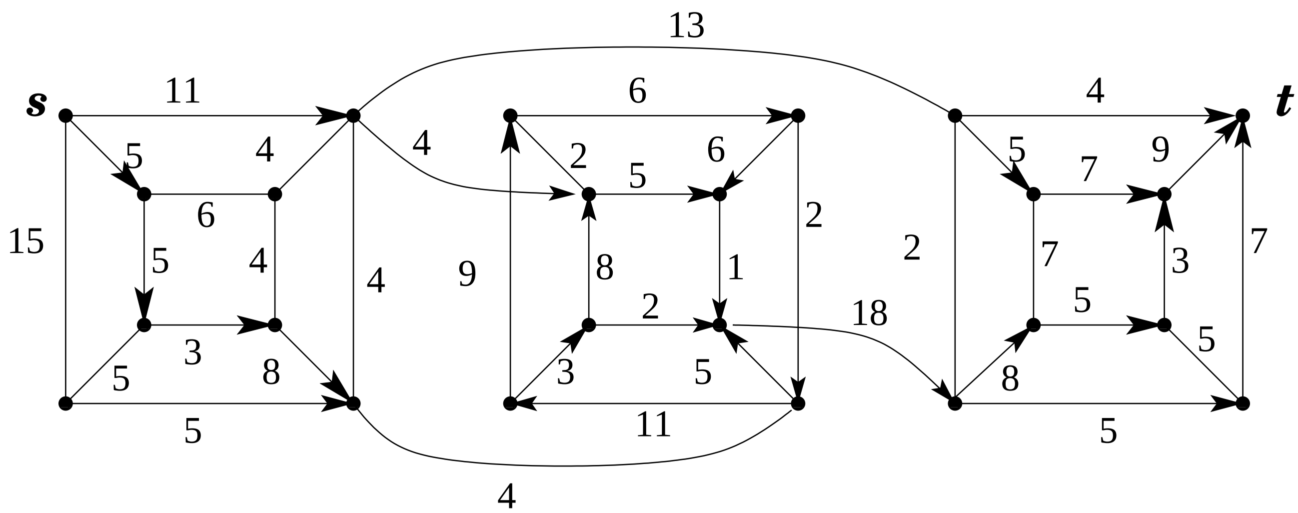
6.2**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

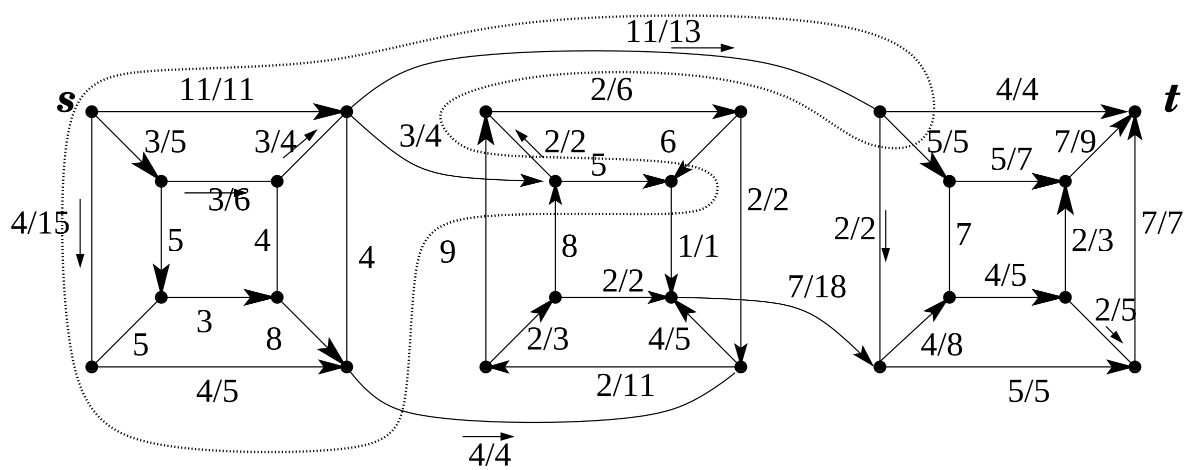
6.3.**(1pt)** Nel grafo G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s.

6.4.**(1pt)** Esprimere la famiglia di tali alberi.

6.5.**(1pt)** Dire, certificandolo, se G è bipartito oppure no.

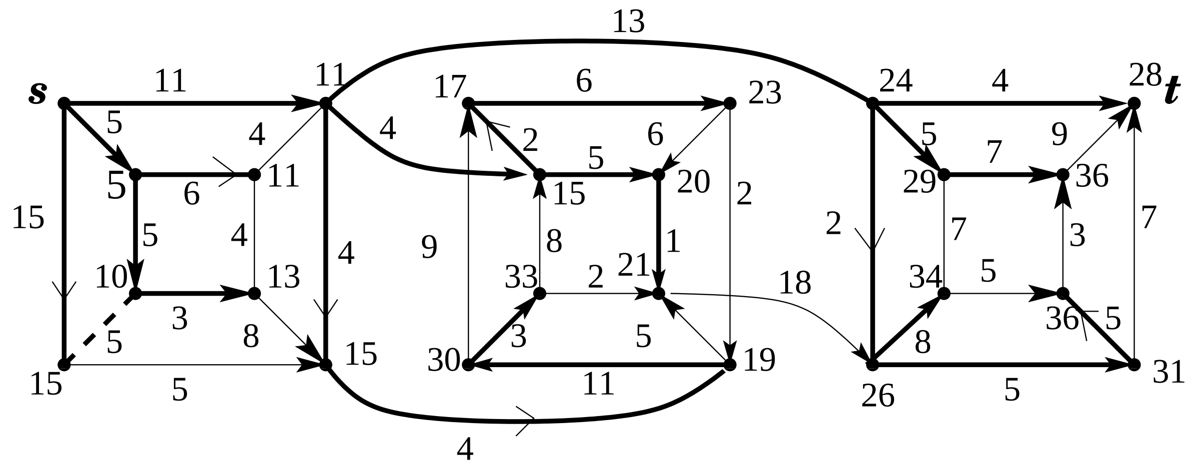
La seguente figura esibisce un flusso massimo (non serve esibire i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo, ma é invece importante specificare il verso e l'entitá del flusso su ogni arco impiegato) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.





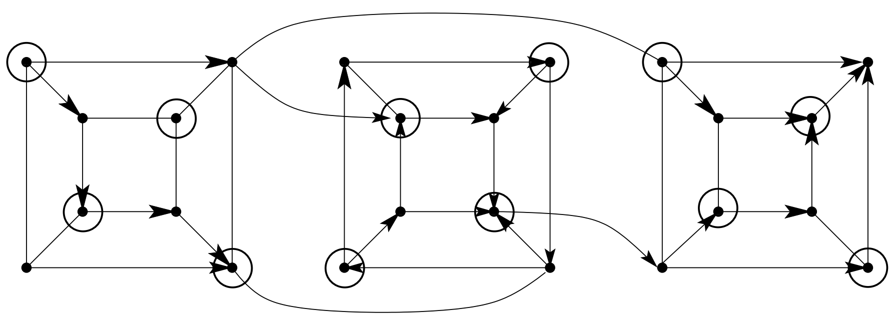
Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t (gli archi a senso unico in direzione contraria sono invece di necessità tutti scarichi). Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 18 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

La seguente figura esibisce l'alberescenza dei cammini minimi dal nodo s (archi il linea continua spessa). La direzione di percorrenza degli archi non-a-senso-unico è stata indicata apponendo dei segnetti (in questo modo resta definita la testa e la coda di ogni arco ed è proprio parlare di arborescenza, ossia di albero orientato). Gli archi in linea tratteggiata spessa indicano scelte alternative per raggiungere il loro nodo testa.



Lo spazio delle arborescenze ottime è ottenuto come prodotto cartesiano delle scelte alternative per il raggiungimento dei singoli nodi ed in questo caso conta 2 soluzioni ottime poichè in questo caso l'unica scelta riguarda il raggiungimento del nodo a distanza 10 ed essa presenta 2 alternative.

Il grafo è bipartito come certificato in figura.



Problema 7 (6 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

7.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

7.2.(1pt) Nel grafo G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

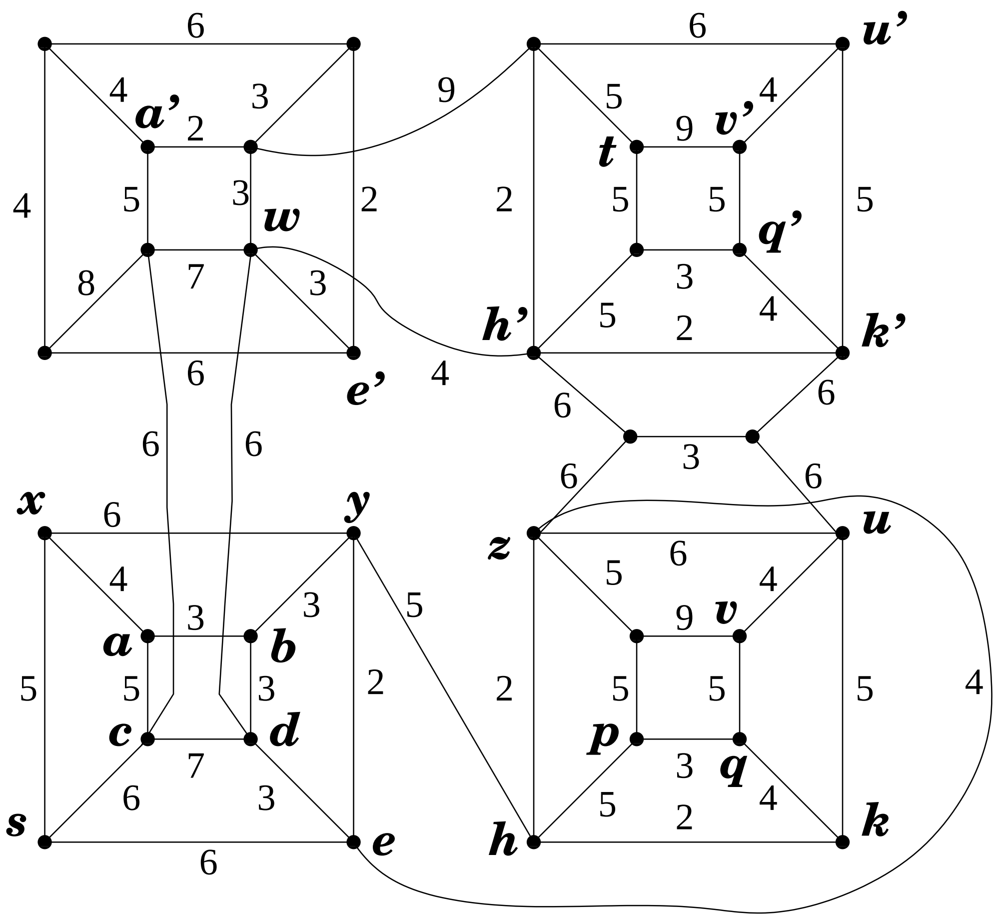
7.3.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.4.(1+1pt) Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xy. Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.

Il grafo non é planare in quanto contiene una suddivisione di $K_{3,3}$, come esibita nella seguente figura.

Nella seguente figura, gli archi in linea spessa costituiscono un albero ricoprente di peso minimo; essi sono in linea continua quando appartengono ad ogni soluzione ottima ed in linea tratteggiata quando sostituibili.

Per analizzare lo spazio di tutte le soluzioni ottime si tenga presente che da un livello di peso all'altro le scelte sono indipendenti e che, nell'analizzare un particolare livello di peso, possiamo contrarre tutti gli archi di peso inferiore e rimuovere tutti gli archi di peso superiore. Ogni foresta massimale



nel grafo così ottenuto corrisponde ad una alternativa possibile per quel livello di peso. Ad esempio, la situazione sul livello degli archi di peso 6 viene utilmente chiarita ed analizzata nella seguente figura dove ci si é sbarazzati degli archi di peso maggiore di 6 e si é rappresentato il collassamento di nodi in supernodi cui si va incontro quando si contraggono tutti gli archi di peso inferiore a 6. (Abbiamo poi anche rimosso quegli archi di peso 6 con entrambi gli estremi nello stesso supernodo).

Deduciamo da tale figura che ogni soluzione ottima impiega precisamente 2 archi di peso 6 tra i soli 6 archi rimasti nella rappresentazione più schematica sulla destra. Dalla stessa rappresentazione é inoltre facile apprezzare come questi 6 archi siano partizionati in 3 coppie di archi paralleli. Vanno bene tutte e sole quelle scelte di 2 di questi 6 archi che non prendano entrambi gli archi da una stessa coppia.

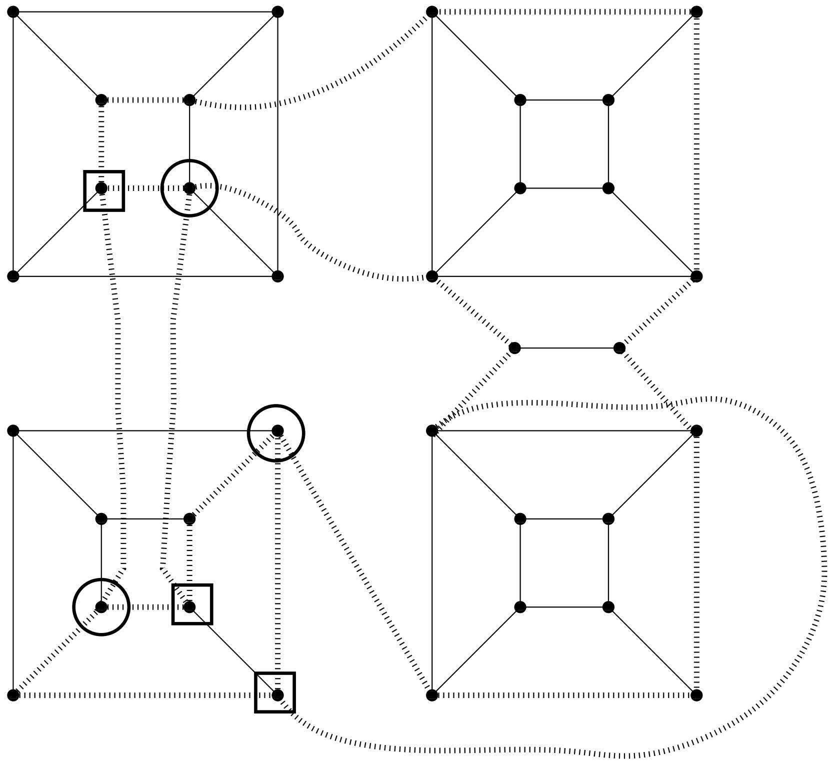
Lascio a voi lo svolgimento di questo metodo sui vari livelli e passo invece alla domanda successiva:

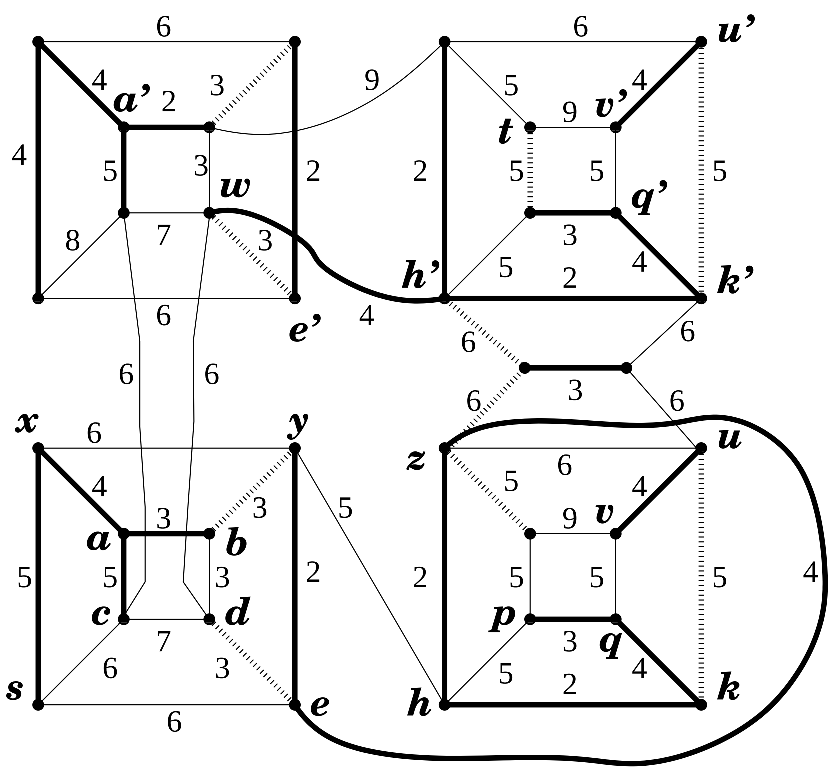
- l'arco zu non é in nessuna soluzione ottima in quanto gli archi zh, hk e ku sono tutti di peso strettamente inferiore e consentono di "emulare" l'arco zu costituende un collegamento alternativo da z ad u;

- l'arco $h'w$ é invece in ogni soluzione ottima in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio che separa il cubo in alto a sinistra dal resto del grafo.

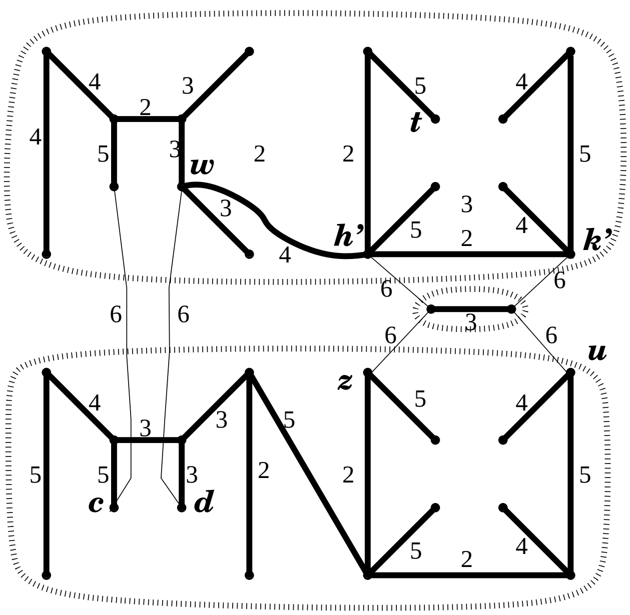
- l'arco xy non é in nessuna soluzione ottima in quanto emulabile col cammino $xaby$ intermante costituito di archi a peso strettamente inferiore.

- un rappresentante della categoria mancante é l'arco $u'k'$ che é presente nella soluzione ottima proposta, ed in effetti appartiene ad almeno una soluzione ottima in quanto è uno degli archi di peso minimo del taglio che separa i nodi u' e v' dagli altri nodi del grafo, ed al tempo stesso è sostituibile con l'arco $v'q'$ nella soluzione proposta in figura ed emulabile in generale per via del cammino $u'v'q'k'$.

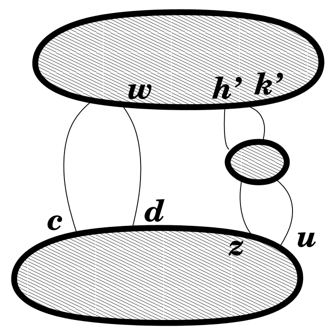




a'
w
e'
h'
t
v'
u'
q'
k'
x
y
a
b
c
d
s
e
z
u
v
p
q
h
k



w
t
h’
k’
z
u
c
d



w
h’ k’
c
d
z
u