Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Esame di Ricerca Operativa - 24 luglio 2012
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (8 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuo se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(2pt) Quale é il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A–1 a G–9?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	
B–3 → G–9	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	
massimo valore	
numero di max-val paths	

Problema 2 (4 punti):

Gestiamo dei traghetti che raggiungono i porti sardi di Cagliari, Olbia, Sassari a partire dai porti di Civitavecchia, Genova, Piombino. Il guadagno netto in cui si incorre per un viaggio di andata e ritorno su ogni singolo tragitto è riportato nella seguente tabella:

	Civitavecchia	Genova	Piombino
Cagliari	2	6	4
Olbia	5	8	7
Sassari	3	6	5

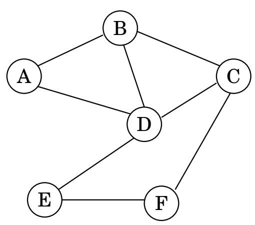
I tre porti sardi possono ricevere al massimo 350, 270 e 160 navi, rispettivamente, e dai porti continentali possono partire al massimo 220, 470 e 180 navi, rispettivamente. Formulare come un problema di programmazione lineare il nostro desiderio di massimizzare i profitti.

Problema 3 (2+2 punti):

Un MATCHING in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M. Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Siamo interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

(2pt) Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

(2pt) Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

Problema 4 (4 punti):

Ho uno zaino di capacità $B = 30$ e, soggetto al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B, intendo trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	47	27	28	48	9	5	17	24	52	17	4	22	22	15	5	13	23	13	20
valore	71	20	15	32	11	4	16	22	30	16	5	21	21	12	6	12	20	14	10

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

B	max val	peso	quali prendere
30			
25			
29			
21			

Problema 5 (7 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = 10$, $x_4 = 20$, $x_5 = 28$ del seguente problema.

$$
\max\ 3x_1 + 18x_2 + 36x_3 + 60x_4 + C_5x_5 + C_6x_6
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 \leq 24 \\
x_3 + x_4 \leq 20 \\
x_5 + x_6 \leq 28 \\
x_1 + x_3 + x_5 \leq 40 \\
x_2 + x_4 + x_6 \leq 30 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

5.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

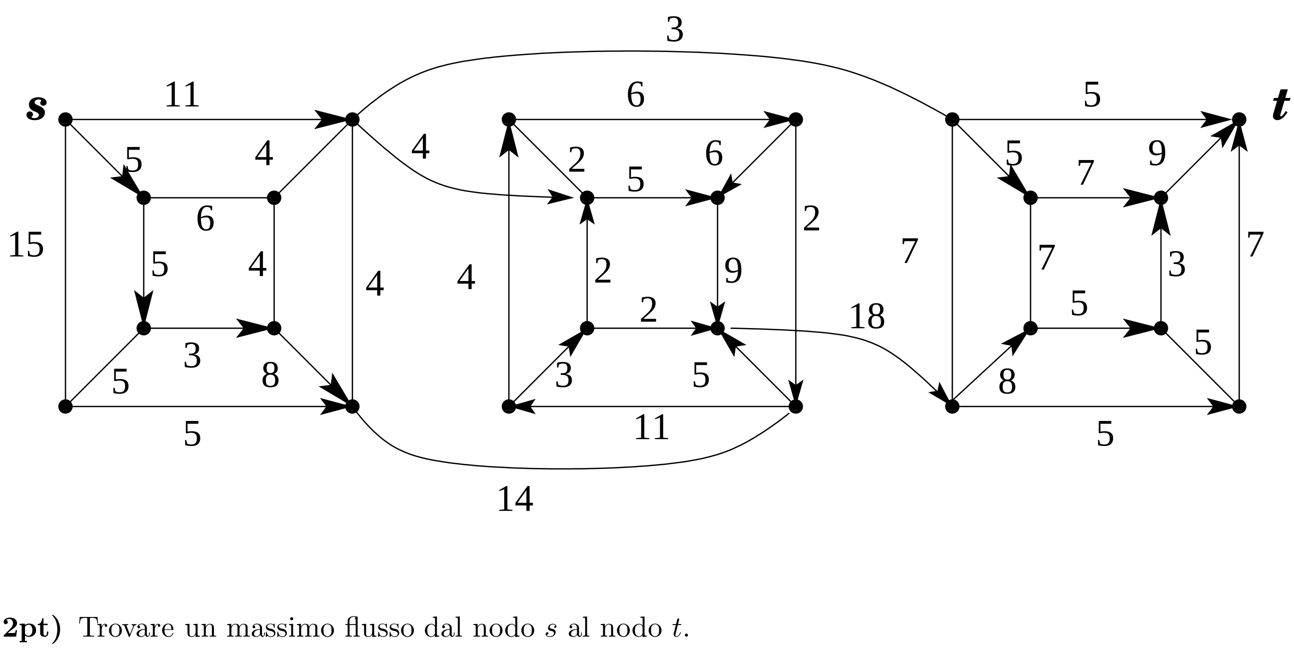
5.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

5.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

5.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

5.5.**(2pt)** Dire per quali valori dei parametri C_5 e C_6 la soluzione assegnata è ottima indicando con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

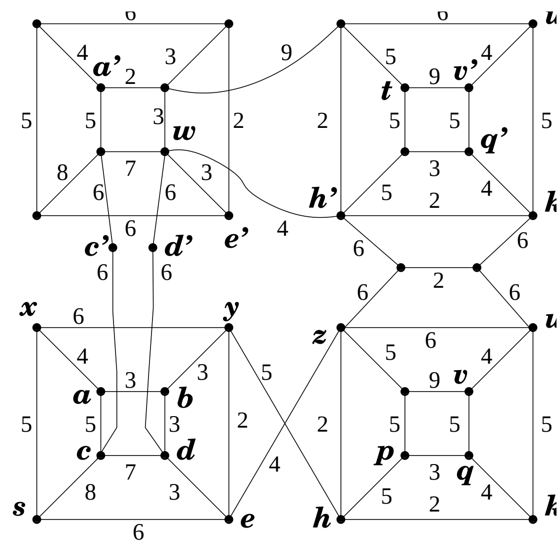
Problema 6 (4 punti):



6.1**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.2**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

Problema 7 (13 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.(1+1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

7.2.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

7.3.(1+1pt) Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo. (Certificando che la rimozione di quel numero di archi è sufficiente a renderlo bipartito ed argomentando che esso é anche necessario).

7.4.(1+1pt) Nel grafo G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

7.5.(1pt) Nel grafo G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.6.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.7.(1+1pt) Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xx'. Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.