# Cammini Ottimi

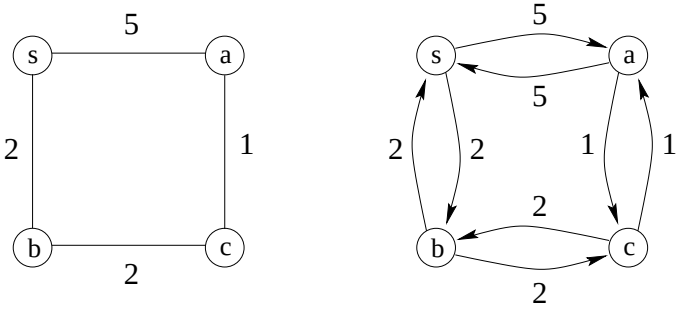
Problemi che richiedono di trovare il cammino di costo minimo fra una o più coppie di nodi di un grafo sono tra i più importanti nelle applicazioni pratiche. Vogliamo qui dare una panoramica introduttiva di sapore algoritmico e prettamente combinatorio.

# Quando il costo di ogni arco è positivo

Dato un digrafo pesato $D$ ed un nodo *sorgente* $s$ di $D$ vogliamo trovare per ogni nodo $v \in V(D) \setminus \{s\}$ un cammino che vada da $s$ a $v$ di costo minimo. (Il costo di un cammino è dato dalla somma dei pesi degli archi nel cammino).

Incominciamo con alcune facili osservazioni:

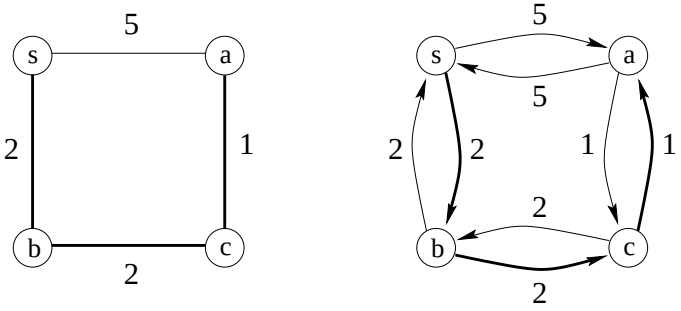
**Fatto 1** *L' eventuale presenza di archi privi di orientamento (archi non diretti) non costituisce un problema: un arco non orientato uv può semplicemente venir sostituito dalle frecce $\vec{uv}$ e $\vec{vu}$ come illustrato in figura.*




**Esercizio 2** *Sapresti esprimere il contenuto di tale osservazione in modo più rigoroso, magari formulando un lemma ed eventualmente dimostrandolo?*

Supponiamo di essere interessati a tutti i cammini minimi da $s$ ad ogni altro nodo. Potrebbe sembrare che in generale si andranno ad utilizzare svariati archi del grafo in esame. Invece è sempre possibile limitarsi a $|V(D)| - 1$ archi:

**Proprietà 3** *Sia $P_{s,v}$ un cammino minimo da $s$ a $v$ e sia $u$ un qualsiasi nodo toccato da $P_{s,v}$. Allora il prefisso di $P_{s,v}$ che porta da $s$ a $u$ è un cammino minimo da $s$ a $u$. Possiamo pertanto sempre individuare un'alborescenza dei cammini minimi come illustrato in figura.*




In virtù di questa osservazione ci è possibile ritornare la soluzione ottima in spazio $\mathcal{O}(|V(D)|)$. L'idea è la seguente: per ogni nodo $v$ ritorno un padre $\pi(v)$ ossia il penultimo nodo in un qualche

**Procedura 1** PATH $(\pi, v)$

1. **while** $s \neq v$
2. produci l'arco $\pi(v)v$;
3. $v \leftarrow \pi(v)$;

cammino ottimo da $s$ a $v$. Gli archi del cammino ottimo da $s$ a $v$ sono quindi prodotti da una procedura PATH qui sopra espressa in pseudocodice.

## Pesi Tutti unitari: Breath First Search

Dato un digrafo $D$ ed un nodo *sorgente* $s$ di $D$ vogliamo trovare per ogni nodo $v \in V(D) \setminus \{s\}$ un cammino che vada da $s$ a $v$ utilizzando il minor numero possibile di archi. Ci stiamo cioè restringendo al caso di cardinalità, quando tutti i pesi sono unitari.

In questo caso abbiamo un'algoritmo molto efficiente (complessità $\mathcal{O}(|E|)$): la famigerata Breath First Search (BFS).

**Algoritmo 2** BFS $(D, c)$

1. $\lambda(s) \leftarrow 0$; $\pi(s) \leftarrow s$;
2. $dist \leftarrow 0$;
3. **repeat**
4. **for each** nodo $v$ non etichettato ed adiacente ad un nodo etichettato con $\lambda = dist$
5. $\lambda(v) \leftarrow dist + 1$;
6. $dist \leftarrow dist + 1$;
7. **until** almeno un altro nodo è stato etichettato;

**Esercizio 4** *Dimostrare come a terminazione sia stato trovato il cammino minimo da $s$ ad ogni nodo raggiungibile da $s$.*

**Esercizio 5** *Come implementeresti l'algoritmo per ottenere la complessità $\mathcal{O}(|E|)$?*

**Esercizio 6** *L'algoritmo BFS é stato descritto utilizzando del cosidetto* pseudocodice. *Sapresti cogliere e puntualizzare le differenze fondamentali tra una codifica ed una pseudocodifica?*

## Pesi Tutti Positivi: l'algoritmo Dijkstra

Ritorniamo ora ad un caso più generale: quello pesato. Assumeremo tuttavia l'ipotesi semplificatrice che tutti i pesi siano non-negativi.

Nell'algoritmo che proponiamo le etichette che diamo ai nodi non sono sempre permanenti ossia ci riserviamo di trovare cammini migliori nel proseguio dell'algoritmo. Piú precisamente associamo un valore booleano $f(v)$ ad ogni nodo. Quando $f(v)$ é *Falso* é ancora possibile che $\lambda(v)$ diminuisca. Quando $f(v)$ é *Vero* il cammino ottimo da $s$ a $v$ è già stato trovato.

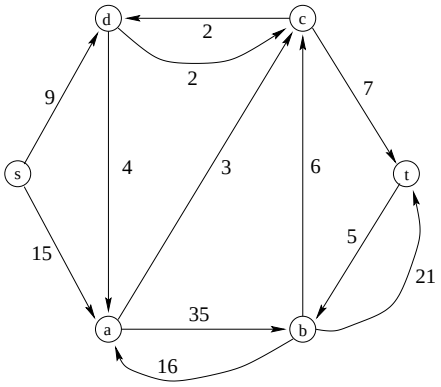
**Algoritmo 3** DIJKSTRA $(D, c)$

1. **for each** nodo $v$ di $D$ **do**
2. $\quad \lambda(v) \leftarrow \infty;\ \pi(v) \leftarrow -1;\ f(v) \leftarrow False;$
3. $\lambda(s) \leftarrow 0;\ \pi(s) \leftarrow s;\ f(s) \leftarrow True;$
4. $\rho \leftarrow s;$
5. **while** $f(t) = Falso;$
6. $\quad$ **for each** freccia $\vec{\rho v}$ di $D$ with $f(v) = Falso$ **do**
7. $\quad\quad$ **if** $\lambda(\rho) + c(\vec{\rho v}) < \lambda(v)$ **then** $\lambda(v) \leftarrow \lambda(\rho) + c(\vec{\rho v});\ \pi(v) \leftarrow \rho;$
8. $\quad$ sia $y$ un nodo tale che $\lambda(v) = \min\{\lambda(x)\ : f(x) = Falso\};$
9. $\quad f(y) \leftarrow Vero;\ \rho \leftarrow y;$

**Esercizio 7** *Dimostrare come a terminazione sia stato trovato il cammino minimo da s ad ogni nodo raggiungibile da s.*

**Esercizio 8** *Sapresti spiegare come mai non esista ancora alcuna implementazione dell'algoritmo Dijkstra con complessità $\mathcal{O}(|E|)$?*

Tracciamo il comportamento dell' *Algoritmo Dijkstra* nel seguente esempio.




| s | a | b | c | d | t |
|---|---|---|---|---|---|
| [0] | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| [0] | 15 | $\infty$ | $\infty$ | 9 | $\infty$ |
| [0] | 15 | $\infty$ | $\infty$ | [9] | $\infty$ |
| [0] | 13 | $\infty$ | 11 | [9] | $\infty$ |
| [0] | 13 | $\infty$ | [11] | [9] | $\infty$ |
| [0] | 13 | $\infty$ | [11] | [9] | 18 |
| [0] | [13] | $\infty$ | [11] | [9] | 18 |
| [0] | [13] | 48 | [11] | [9] | 18 |
| [0] | [13] | 48 | [11] | [9] | [18] |

# Quando non ci sono cicli negativi

Quando siamo in presenza di archi di costo negativo il problema si complica notevolmente. Tanto è vero che se non poniamo restrizione alcuna il problema di trovare un cammino *semplice* (nessun arco ripetuto) ottimo diviene *NP*-completo in quanto contiene come caso particolare il problema del cammino amiltoniano. Se non richiediamo che il cammino sia semplice allora il problema diviene illimitato se e solo se siamo in presenza di cicli negativi. Si adotta pertanto la seguente:

**Assunzione 9** *Il digrafo in esame non contiene alcun ciclo negativo (somma dei pesi degli archi negativa).*

In virtù di tale assunzione risulta poi inessenziale richiedere o meno che i cammini siano semplici dacché ogni cammino di peso minimo eviterá di sua sponte di ciclare.

Sottolineiamo ora una questione importante: la riduzione di cui al Fatto 1 non è più applicabile poichè un arco non orientato negativo darebbe automaticamente luogo ad un ciclo negativo. Pertanto ci limiteremo ai soli digrafi.

**Assunzione 10** *Ogni arco del grafo in questione è una freccia.*

(In verità il problema di reperire i cammini minimi può essere risolto in tempo polinomiale, seppur con maggiori difficoltà, anche nel contesto di grafi ad archi non orientati e senza cicli negativi. Per fare ciò occorre utilizzare tecniche di matching.)

Ritornando invece al caso più semplice dei digrafi abbiamo l'algoritmo di Ford la cui complessità è $\mathcal{O}(mn)$.

---

**Algoritmo 4** FORD $(D, c)$

---

1. **for each** nodo $v$ di $D$ **do**
2. $\quad \lambda(v) \leftarrow \infty$; $\pi(v) \leftarrow -1$;
3. $\lambda(s) \leftarrow 0$; $\pi(s) \leftarrow s$;
4. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V(D)|$ **do**
6. $\quad$ **for each** nodo $v$ di $D$ **do**
7. $\quad\quad \eta \leftarrow \lambda(\rho) + c(\vec{\rho v}) = \min\{\lambda(u) + c(\vec{uv}) \ : u \in V(D)\}$;
8. $\quad\quad$ **if** $\eta < \lambda(v)$ **then** $\lambda(v) \leftarrow \eta$; $\pi(v) \leftarrow \rho$;

---

**Esercizio 11** *Dimostrare come a terminazione sia stato trovato il cammino minimo da $s$ ad ogni nodo raggiungibile da $s$.*

*Suggerimento:* Si dimostri per induzione che a completamento del ciclo a conteggio per $i = k$ la variabile $\lambda(v)$ esprime il minimo costo di un cammino da $s$ a $v$ in al più $k$ archi.