Prova scritta di Matematica II - 10 giugno 2009 - CORREZIONE Fila C

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(1, \sqrt{3}, \pi)$, $(2, 0, \sqrt{3} + \pi)$ e $(3, \pi + \sqrt{3}, 0)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (2, 5\,t, 5\,t)$ e la retta $y = z = 14$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla funzione $z = x^2 - y^2 + 3$ nel suo unico punto stazionario;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $y + z = \sqrt{3} + \pi$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

La normale al piano Π_2 è normale ad entrambe le rette e si ottiene quindi come prodotto vettoriale delle direzioni delle rette $(0, 1, 1) \wedge (1, 0, 0) = (0, 1, -1)$. In effetti il piano $y = z$ contiene ambo le rette.

In un punto stazionario il piano tangente è sicuramente orrizzontale. In questo caso $z = 3$ è il piano in questione.

Il piano Π_1 è ortogonale al piano Π_2 come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(0, 1, 1) \cdot (0, 1, -1) = 0$. La relazione tra i vettori $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ (tra i piani Π_1 e Π_3) e tra i vettori $(0, 1, -1)$ e $(0, 0, 1)$ (tra i piani Π_2 e Π_3) è invece generica.

Π_1: $y + z = \sqrt{3} + \pi$

Π_2: $y - z = 0$

Π_3: $z = 3$

Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha, \alpha, \alpha - \beta) \qquad v_2 : (1, \alpha^2, \alpha - 2\beta) \qquad v_3 : (0, 1, 1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

2.) v_1 e v_3 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Affinchè v_1 sia parallelo a v_2 le prime due componenti di questi vettori devono essere proporzionali: otteniamo $\alpha : 1 = \alpha : \alpha^2$, ossia $\alpha^2 = 1$, da cui $\alpha = \pm 1$. Se $\alpha = 1$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere identici (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\beta = 0$ (dalla terza componente). Se $\alpha = -1$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere opposti (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\alpha - \beta = -(\alpha - 2\beta)$ (per la terza componente) da cui $\beta = \frac{2}{3}\alpha = -\frac{2}{3}$.

Il prodotto scalare $v_1 \cdot v_3 = \alpha + (\alpha - \beta)$ si annulla per $\beta = 2\alpha$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha & \alpha-\beta \\ 1 & \alpha^2 & \alpha - 2\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| = \alpha^3 + (\alpha - \beta) - \alpha - \alpha(\alpha - 2\beta) = \beta(2\alpha - 1) + \alpha^3 - \alpha^2 \,.$$

si annulla ogniqualvolta $\beta = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{1-2\alpha}$ (ha senso per $\alpha \neq \frac{1}{2}$). L'annullamento del prodotto triplo denuncia la coplanarità tra i tre vettori.

1.) v_1 e v_2 paralleli: per $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e per $(\alpha, \beta) = (-1, -\frac{2}{3})$
2.) v_1 e v_2 ortogonali: per $\beta = 2\alpha$
3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: per $\beta = \frac{\alpha^3-\alpha^2}{1-2\alpha}$ (con $\alpha \neq \frac{1}{2}$) 1+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R incidente ortogonalmente sia nella sfera di raggio $\sqrt{41}$ e centro in $(1, 1, 1)$ che nel piano $x + y + z = 0$.

La retta R passerà per il centro $(1, 1, 1)$ della sfera, e la sua direzione sarà espressa dal vettore dei coefficienti direttori del piano $(1, 1, 1)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (1+t, 1+t, 1+t)$. Si noti che la retta passa per l'origine e quindi la scrittura $R(t) = (t, t, t)$, piú semplice, é preferibile.

$R(t) = (t, t, t)\,.$ 3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x + y + z = 0$ e $y = 2x$ e la retta $R_2 = (1 - 2\,t, t - 1, 2 + t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, 2\,t, -3\,t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, 2, -3)$ e la retta R_2 di direzione $(-2, 1, 1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1, -1, 2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = x^2\,(x^2 - 1) - y^2\,(y^2 - 1)\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F. (Suggerimento: se avete difficoltá a produrre la fattorizzazione, provate allora ad abbassare il grado con opportune sostituzioni in modo che vi sia facile l'individuazione delle radici);

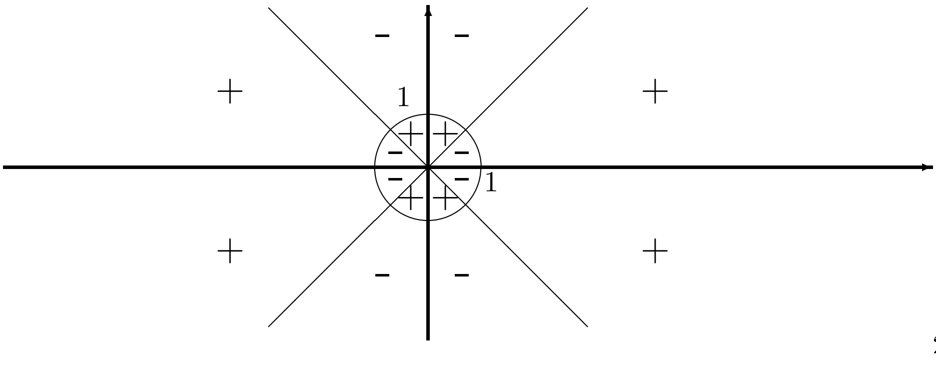
Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F operando nelle tre solite fasi (sviluppare, semplificare, raccogliere):

$$\begin{array}{rll} F(x,y) & = x^2\,(x^2-1) - y^2\,(y^2-1) & \text{come data} \\ & = x^4 - x^2 - y^4 + y^2 & \text{esplosa, sciolti i termini, sviluppata} \\ & = (x^2+y^2-1)(x^2-y^2) & \text{fattorizzazione parziale} \\ & = (x^2+y^2-1)(x+y)(x-y)\,. & \text{fattorizzata} \end{array}$$

Alla fattorizzazione parziale si poteva pervenire applicando dapprima la riscrittura $(x^4 - y^4) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ oppure, in mancanza di idee, giocare le sostituzioni $x^2 = X$ e $y^2 = Y$ (motivate dal fatto che la x e la y entrano nella forma della $F(x, y)$ solo come x^2 ed y^2) per poi avvalersi della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per l'individuazione delle radici.

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = (x^2+y^2-1)(x+y)(x-y)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o $(x+y)$ o $(x-y)$ o (x^2+y^2-1). Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \vee y = -x \vee x^2 + y^2 = 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Quattro di queste regioni sono limitate (quelle interne al cerchio).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x^4 - x^2 - y^4 + y^2$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x^3 - 2\,x$ ed analogamente (visto che $F(x,y) = -F(y,x)$) si avrà $F_y := -4\,y^3 + 2\,y$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 4\,x^3 - 2\,x &= 0 \\ 4\,y^3 - 2\,y &= 0\,. \end{cases}$$

Si nota subito che le due equazioni sono completamente disaccoppiate: possiamo risolverle indipendentemente e fare il prodotto cartesiano delle rispettive soluzioni (valori di x, valori di y). Le soluzioni sono $x = 0$ e $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ da un lato e $y = 0$ e $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ dall'altro. Dallo studio possiamo dedurre che dei $3 \times 3 = 9$ punti stazionari i seguenti 5 sono delle selle: $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$. Restano da classificare i 4 ulteriori punti $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$. Comunque anche l'esistenza di questi 4 ulteriori punti (uno per ciascuna delle 4 regioni limitate) era deducibile dallo studio del segno poichè ogni regione limitata vive almeno un punto di massimo ed uno di minimo. Pertanto ciascuno di questi 4 punti è il punto estremale ricercato nella regione chiusa di sua pertinenza (ossia nel suo quarto di cerchio), ed è pertanto punto estremale anche per la F (almeno in senso locale). Su tutto il piano, questi quattro punti sono dei massimi/minimi relativi, dacchè la F non è limitata. Ora, $F\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$ mentre $F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

5 PUNTI DI SELLA: $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

2 PUNTI DI MAX. RELATIVO: $\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ con $F\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

2 PUNTI DI MIN. RELATIVO: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ con $F\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$. 2+2+2/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i,0))$;

Chiaramente, il punto $(i, 0, F(i,0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Tutti e tre i punti appartengono a Σ_0, e quindi i tre piani hanno equazioni del tipo

$$z = F_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y - y_0) = F_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)\,y\,.$$

Di fatto, poichè la F dipende solo dalla y^2 (e quindi $F(x,y) = F(x,-y)$), in tutti i punti dell'asse delle x (dove $y = 0$), la seconda coordinata del gradiente è nulla. Quindi il piano tangente può essere inclinato solamente nella direzione delle x. L'equazione del piano tangente (testo, pag. 192) si riduce pertanto a

$$z = F_x(x_0,y_0)\,(x - x_0)\,.$$

Analizziamo ora singolarmente i tre punti. Poichè $(0,0)$ è punto stazionario, ci attendiamo che il piano ivi tangente sia orrizzontale, ossia abbia equazione $z = 0$. Nel caso di Π_1, ricordando che $F_x = 4\,x^3 - 2\,x$, otteniamo l'equazione $z = F_x(1,0)\,(x-1) = 2\,x - 2$. Nel caso di Π_2, otteniamo l'equazione $z = F_x(2,0)\,(x-2) = 28\,(x-2)$. Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ $\qquad$ Π_1: $z = 2\,x - 2$ $\qquad$ Π_2: $z = 28\,(x-2)$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2 + y^2 \leq 4$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè i punti stazionari della F sono già stati presi in rassegna, vogliamo ora ricercare quei punti estremali di F che siano situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del cerchio $x^2 + y^2 = 4$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4\,x^3 - 2\,x & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ -4\,y^3 + 2\,y & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 & = g(x,y) = & 4\,. \end{cases}$$

Poichè i punti stazionari sono stati ormai tutti individuati possiamo limitarci ad assumere $\lambda \neq 0$. Ora, se $x = 0$, allora $y = \pm 2$ (e, simmetricamente, se $y = 0$ allora $x = \pm 2$). Invece, se $x, y \neq 0$ allora il sistema si semplifica in

$$\begin{cases} 2\,x^2 - 1 & = & 1\,\lambda \\ -2\,y^2 + 1 & = & 1\,\lambda \\ x^2 + y^2 & = g(x,y) = & 4\,. \end{cases}$$

da cui, eliminando λ, otteniamo

$$\begin{cases} 2\,x^2 - 1 & = & -2\,y^2 + 1 \\ x^2 + y^2 & = g(x,y) = & 4\,. \end{cases}$$

che non produce ulteriori soluzioni.

Abbiamo pertanto due massimi assoluti con $F(\pm 2, 0) = 12$ e due minimi assoluti con $F(0, \pm 2) = -12$. Anche questa volta un'analisi delle simmetrie in gioco conferma la giustezza di queste 4 radici caleidoscopiche.

2.d)

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2, 0)$

dove $F = 12$

2 Minimi Assoluti: $(0, \pm 2)$

dove $F = -12$

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dalle curve $x = e$, $z = e$, e $xz = 1$. (Dove e indica il numero di Nepero). Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

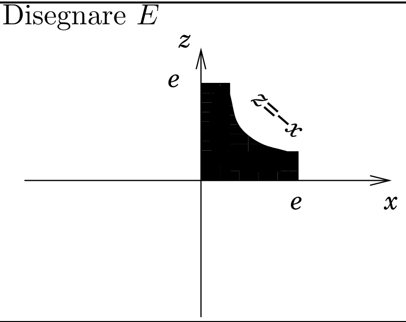
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \, dx \, dy \, dz$;

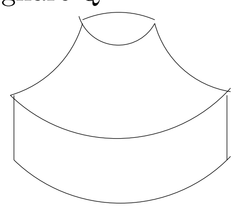
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E, situata nel primo quadrante, è contornata dalle rette $x = e$ e $z = e$ e da un ramo dell'iperbole equilatera $xz = 1$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, \, x^2 + y^2 \leq e^2, \, z \leq e \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z\rho \leq 1, \, \rho \leq e, \, z \leq e \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{e}} \int_0^{e} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \int_0^{\frac{1}{\rho}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{1}{e}} \rho \, [z]_0^e \, d\rho + \int_{\frac{1}{e}}^{e} \rho \, [z]_0^{\frac{1}{\rho}} \, d\rho \right) \\
&= 2\pi \left(\int_0^{\frac{1}{e}} e\rho \, d\rho + \int_{\frac{1}{e}}^{e} 1 \, d\rho \right) = 2\pi \left(e \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{e}} + [\rho]_{\frac{1}{e}}^{e} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2e} + e - \frac{1}{e} \right) = \pi \left(2e - \frac{1}{e} \right).
\end{aligned}
$$

c)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{e}} \int_0^{e} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \int_0^{\frac{1}{\rho}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \pi \, \left(2e - \frac{1}{e}\right)$$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{e}} \int_0^{e} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \int_0^{\frac{1}{\rho}} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{\frac{1}{e}} \rho \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{e} d\rho + \int_{\frac{1}{e}}^{e} \rho \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\rho}} d\rho\right) \\
&= 2\,\pi \left(\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{e^2}{2}\rho \; d\rho + \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{2\,\rho} \; d\rho\right) = \pi \left(e^2 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{e}} + [\log\rho]_{\frac{1}{e}}^{e}\right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{2}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

d)

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{e}} \int_0^{e} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \int_0^{\frac{1}{\rho}} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{5}{2}\,\pi$$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{5}{2}\,\pi}{\pi\,\left(2e - \frac{1}{e}\right)} = \frac{5}{4e - \frac{2}{e}}\,.$$

e)

$x_b = 0$ $\qquad y_b = 0$ $\qquad z_b = \frac{I}{V} = \frac{5}{4e - \frac{2}{e}}$

2/30