Prova scritta di Matematica II - 27 giugno 2007 - CORREZIONE Fila D

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 tangente nel punto $(3, 4, 0)$ alla sfera di raggio 5 e centro nell'origine;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(3, 4, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(3, 4, 0)$ e contente la retta $P(t) = (3\,t + 3, 4\,t + 4, 1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il piano Π_1 sarà ortogonale al raggio dall'origine verso il punto $(3, 4, 0)$ ed avrà equazione $(x, y, z) \cdot (3, 4, 0) = (3, 4, 0) \cdot (3, 4, 0)$ ossia $3\,x + 4\,y = 25$.

Passando per l'origine, il piano Π_2 sarà descrivibile tramite un'equazione della forma $a\,x + b\,y + c\,z = 0$, dove possiamo assumere $c = 1$ in considerazione della dislocazione reciproca dei 3 punti di passaggio. A questo punto, la condizione del passaggio per $(0, 1, 1)$ impone $b = -1$, e quindi la condizione del passaggio per $(3, 4, 0)$ impone $a = 4/3$. Moltiplicando tutto per 3 otteniamo $4\,x - 3\,y + 3\,z = 0$. Consiglio sul piano metodologico: si ricontrolli il soddisfacimento sui tre punti per accertarsi della validità di questa equazione. Inoltre, valevole come verifica per l'equazione di Π_1, la nostra curiosità ci spinge ad immaginare che Π_2, dovendo contenere il raggio, sia ortogonale a Π_1, il che trova verifica nell'annullamento del prodotto scalare: $(3, 4, 0) \cdot (4, -3, 0) = 12 - 12 + 0 = 0$.

Il piano Π_3 passante per $(3, 4, 0)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t + 3, 4\,t + 4, 1)$ contiene in particolare il punto $P(-1) = (0, 0, 1)$ ed è ortogonale al vettore $(3, 4, 0) \wedge [(0, 0, 1) - (3, 4, 0)] = (3, 4, 0) \wedge (0, 0, 1) = (4, -3, 0)$. Infatti risultano coplanari ad esso sia il vettore $(3, 4, 0)$ che esprime la direzione della retta $P(t)$ contenuta in esso sia il vettore $(0, 0, 1) - (3, 4, 0)$ che esprime la posizione relativa tra due punti sempre in esso contenuti. Poichè $(4, -3, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$, possiamo descrivere il piano Π_3 con l'equazione $4\,x - 3\,y = 0$. (Si verifichi il passaggio per $(3, 4, 0)$ e per il generico punto $P(t)$).

I piani Π_3 e Π_1 sono paralleli come denunciato dall'annullamento del prodotto scalare $(4, -3, 0) \cdot (3, 4, 0) = 0$. Invece i piani Π_2 e Π_3 sono in posizione generica poichè i vettori $(4, -3, 3)$ e $(4, -3, 0)$ non sono nè ortogonali nè paralleli.

Π_1: $3\,x + 4\,y = 25$	Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $4\,x - 3\,y + 3\,z = 0$	
Π_3: $4\,x - 3\,y = 0$	1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}(0, \alpha, \alpha) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \qquad w = \frac{1}{\sqrt{3\,\alpha^2 - 2\,\alpha + 1}}(1 - \alpha, \alpha, \alpha)\,.$$

1.b.a. Determinare i valori di α per cui:

1. u risulta definito; w risulta definito;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
4. $u \cdot v$ è massimo; $v \cdot w$ è massimo.

1.) u risulta definito: $\forall\alpha \neq 0$	w risulta definito: $\forall\alpha \in \mathbb{R}$
2.) u e v sono ortogonali: nessun α	v e w sono ortogonali: $\alpha = 0$
3.) u e v sono paralleli: $\forall\alpha \neq 0$	v e w sono paralleli: $\alpha = 1$
4.) $u \cdot v$ è massimo: $\alpha > 0$	$v \cdot w$ è massimo: $\alpha = 1$

1+1+1+1/30

Infatti:
1. la divisione di un vettore per uno scalare risulta definita se e solo se lo scalare è diverso da zero;
2. due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare vale zero;
3. due vettori sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo;
4. quando due versori sono paralleli il loro prodotto scalare è massimo (vale 1) purchè i versori abbiano lo stesso verso oltre che la stessa direzione.

1.b.b. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \frac{1}{2\sqrt{3\,\alpha^3 - 2\,\alpha^2 + \alpha}} \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad (\forall\alpha \neq 0)$$

1/30

In effetti si era visto al punto precedente che i vettori u e v sono sempre paralleli, quindi torna.

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}$, $y = \pi\,t + 3$, $z = 1 - \pi\,t$ e $x = 0$, $y = 3 + \sqrt{2} - s$, $z = 1 + s$ e determinare se esse siano sghembe, incidenti, o coplanari.

È evidente che le due rette sono parallele in quanto hanno direzione $(0, \pi, -\pi)$ e $(0, -1, 1)$ rispettivamente. (Di fatto risulta altresì evidente che R_1 trova una riscrittura parametrica più semplice come $x = \sqrt{2}$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$, ed a questo punto il parallellismo è, se possibile, ancora più evidente). Dal parallellismo disegue la coplanarità.

La direzione comune alle due rette è quella espressa dal versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$. Un modo pratico di misurare la distanza tra R_1 ed R_2 è pertanto quello di prendere la norma del prodotto vettoriale tra il versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$ ed un qualsiasi vettore spostamento da un punto di R_1 ad un punto di R_2. Come vettore spostamento risulta conveniente prendere $R_2(0) - R_1(0) = (0, 3 + \sqrt{2}, 1) - (\sqrt{2}, 3, 1) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ottenendo

$$d(R_1, R_2) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right| = |(0, -1, 1) \wedge (-1, 1, 0)| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,.$$

Resta così confermato che le due rette siano distinte.

$$\boxed{\begin{array}{l} d(R_1,R_2) = \big|(0,-1,1)/\sqrt{2} \wedge (-\sqrt{2},\sqrt{2},0)\big| = |(-1,-1,-1)| = \sqrt{3}\,. \\ \text{le rette } R_1 \text{ e } R_2 \text{ sono coplanari} \qquad 3+1/30 \end{array}}$$

Un procedimento alternativo per il computo della distanza tra le due rette R_1 ed R_2 poteva essere quello di scegliere un qualsiasi punto di R_1, come $R_1(0) = (\sqrt{2},3,1)$ e ricercare il punto di R_2 a minima distanza da esso minimizzando il funzionale $d(R_2(s),R_1(0))$ visto come funzione della sola variabile s. Di fatto, vista la monotonia della funzione radice, basta ricercare quel valore di s che minimizza il funzionale $(0-\sqrt{2})^2 + ((3+\sqrt{2}-s-3)^2 + ((1+s)-1)^2$, ossia quello che minimizzi il funzionale $(\sqrt{2}-s)^2 + (s)^2 = 2 - 2\sqrt{2}\,s + 2\,s^2$. Il valore di s ricercato é $-\sqrt{2}/2$ e

$$d(R_1,R_2) = d(R_1(0),R_2(-\sqrt{2}/2)) = d((\sqrt{2},3,1),(0,3+\sqrt{2}/2,1-\sqrt{2}/2)) = \sqrt{2+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{3}\,.$$

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R di equazione vettoriale $R(t) = (3+t,5+t,t)$ ed il piano Π passante per l'origine ed ortogonale al versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

Si noti che $d(R(0),\Pi) = d\,(\Pi,(3,5,0)) = |(0,1,1)\cdot(3,5,0)| = 5$ mentre $d(R(1),\Pi) = d\,(\Pi,(4,6,1)) = |(0,1,1)\cdot(4,6,1)| = 7 \neq 5$. Pertanto R è incidente a Π e $d(R,\Pi) = 0$.

In effetti il vettore $(1,1,1)$ che di fatto esprime la direzione della retta R non è ortogonale al versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} d(R,\Pi) = 0 \qquad (R \text{ è incidente a } \Pi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2/30 \end{array}}$$

2. È data la funzione $F(x,y) = (x-y)^2 + x^2y - (x^2+y^2)\,.$

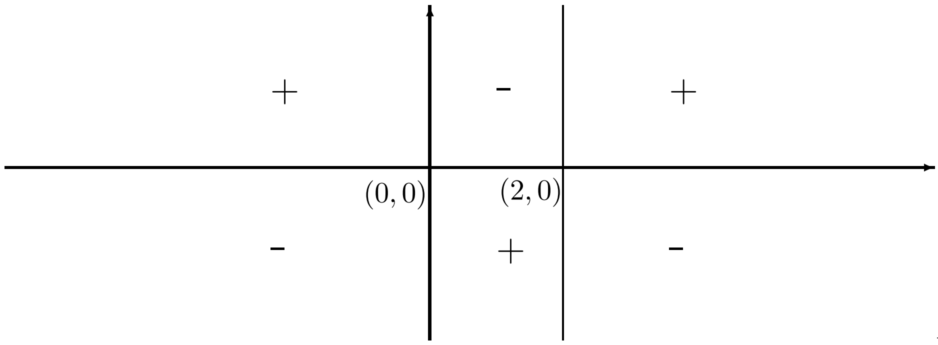
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x-y)^2 + x^2y - (x^2+y^2) = x^2 - 2\,xy + y^2 + x^2y - x^2 - y^2 = x^2y - 2\,xy \\ &= x(x-2)y\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x(x-2)y$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x-2)$ o y. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = \pm 2 \vee y = \pm 0\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x(x-2)y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e $(2,0)$. Si noti che entrambi i punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che entrambi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

2 PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.

Entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, 0)$;

In effetti, per $i = 0, 1, 2$, il punto $(i, 0, 0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(i, 0) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0,0)$ e $(2,0)$ sono punti stazionari, i piani Π_0 e Π_2 sono perfettamente orrizzontali, ed essendo entrambi disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_1. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(1,0) = F_x(1,0)\,(x-1) + F_y(1,0)\,(y-0)$ ed otteniamo l'equazione

$z = 0\,(x-1) - 1\,y$, che si semplifica in $z = -y$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0,0)$ a $(2,0)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ $\quad\quad$ Π_1: $z = -y$ $\quad\quad$ Π_2: $z = 0$ $\quad\quad$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 12\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R, e pertanto il piano è di andarli a stanare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + y^2$ e $g_x = 2\,x - 2$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ x(x-2) & = F_y = \lambda g_y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2-2\,x & = g(x,y) & = & 12\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo di fatto assumere $\lambda \neq 0$. Nel massaggiare e combinare opportunamente le equazioni, meglio vederci, e vale pertanto la pena spendere l'osservazione preliminare che R altro non è che un cerchio con centro nel punto $(1,0)$.

A questo punto non dovrebbe sorprendere che la prima equazione è soddisfatta in corrispondenza di $x = 1$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $y = \pm\sqrt{13}$; a questo punto il soddisfacimento della seconda equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente la cosa, risulta evidente che i poli sud e nord del cerchio siano punti estremali, con $F(1, \pm\sqrt{13}) = \mp\sqrt{13}$.

L'esclusione di queste due ovvie soluzioni conduce ad una semplificazione delle equazioni ottenuta assumendo $x \neq 1$. In effetti, se $x \neq 1$, allora la prima equazione si semplifica drammaticamente in $\lambda = y$, che, infornato nella seconda equazione porta a conludere che $2\,y^2 = x(x-2)$. Questa equazione combinata con la terza (per praticità, si moltiplichi la terza equazione per 2 ed in essa si sostituisca quindi $2\,y^2 = x(x-2)$) conduce ad un'equazione di secondo grado le cui radici sono $x = -2$ ed $x = 4$. A ciascuna di esse corrispondono 2 valori per y ($y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$) per un totale di 4 punti estremali dalle evidenti simmetrie. In effetti la F presenta le simmetrie $F(x,-y) = -F(x,y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse delle x) e $F(1+x,y) = F(1-x,y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse $x = 1$). Ora, $F(4,2) = 16 > \sqrt{13}$ e pertanto questi quattro punti sono tutti estremi assoluti.

2.d)

2 Max Assoluti: $(-2,2)$ e $(4,2)$; $F(-2,2) = F(4,2) = 16$

2 Min Assoluti: $(-2,-2)$ e $(4,-2)$; $F(-2,-2) = F(4,-2) = -16$

1 Max Relativo: $(1,-\sqrt{13})$; $F(1,-\sqrt{13}) = \sqrt{13}$

1 Min Relativo: $(1,\sqrt{13})$; $F(1,\sqrt{13}) = -\sqrt{13}$ 6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \log_2 x(x-2)y$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x(x-2)y > 0 \}$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti massimali di $h(x,y) := \log_2 x(x-2)y$ nella regione $R \cap D[h]$.

Poichè $h(x,y) = \log_2 F(x,y)$, e considerato che la funzione $\log_b \cdot$ è monotona crescente per ogni base $b > 1$, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

2 Max Assoluti: $(-2,2)$ e $(4,2)$; $h(-2,2) = h(4,2) = \log_2 16 = 4$

1 Max Relativo: $(0,-\sqrt{13})$; $h(0,-\sqrt{13}) = \log_2 \sqrt{13} = \frac{1}{2}\log_2 13$

2/30

3. In un riferimento Cartesiano x,y,z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq x \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z. Sia Q l'intersezione tra M ed il piano $z = \frac{R}{2}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere M e Q in coordinate cilindriche;

3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane;

3.d. Calcolare il volume di M mediante integrazione;

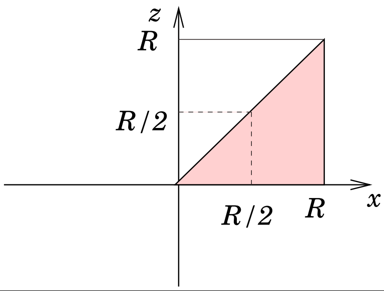
3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \, dx \, dy \, dz$;

3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di M;

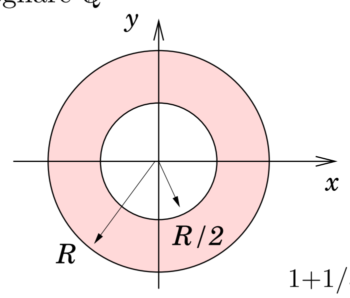
3.g. Calcolare la superfice S di M.

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,R)$ ed (R,R), ed è riportata qui sotto in figura. Quando ruotiamo la superfice E attorno all'asse delle z otteniamo un cilindro da cui è stato scavato fuori un cono con la punta rivolta verso il basso e toccante la base del cilindro. Cono e cilindro hanno lo stesso asse (l'asse delle zeta) e la base del cono coincide con la base superiore del cilindro. (Si veda in figura). Intersecando M con il piano orrizzontale $z = \frac{R}{2}$ si ottiene un disco bucato Q, come quando il pistolero centra perfettamente la moneta da un dollaro. Il dollaro aveva raggio R mentre la pallottola doveva probabilmente avere raggio $\frac{R}{2}$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) coordinate cilindriche

$$M = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \rho \leq R\}$$

$$Q = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \tfrac{R}{2}, \ \tfrac{R}{2} \leq \rho \leq R\}$$

1+1/30

c) coordinate Cartesiane

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \tfrac{R}{2}, \ \tfrac{R^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

1/30

Vista la simmetria cilindrica di M, per il computo del volume V di M conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho 1 \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \\ &= \frac{2}{3} \pi R^3 . \end{aligned}$$

d)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \tfrac{2}{3} \pi R^3$$

3/30

Il computo di I può essere impostato allo stesso modo.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho z \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho^3}{2} \, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{8}\right]_0^R \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^4 .$$

e)	$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\rho z\cdot\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\pi R^4$ 3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R .$$

f)	$x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{3}{8} R$ 2/30

La superfice di M andava scomposta nella superfice della base inferiore del cilindro (πR^2) più la superfice della parete laterale del cilindro ($2\pi R^2$) più la superfice del cono ($\sqrt{2}\,\pi R^2$). La superfice sul cono poteva essere facilmente calcolata sulla base dell'osservazione che essa non cambia se lo taglio lungo un qualsiasi segmento che vada dal vertice del cono ad un punto della circonferenza su cui il cono poggia, e se poi lo spiano ottenendo un settore di circonferenza. La lunghezza del segmento su cui ho tagliato è chiamata altezza obliqua del cono, e nel nostro caso vale $\sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$ ma è comunque sempre ottenibile tramite il teorema di Pitagora. L'area di un settore di circonferenza di raggio ρ e lungo ℓ vale $\frac{\rho\ell}{2}$. In conclusione, la superfice del nostro cono vale effettivamente $\frac{(\sqrt{2}R)(2\pi R)}{2} = \sqrt{2}\,\pi R^2$. La superfice di M vale $\pi R^2 + 2\pi R^2 + \sqrt{2}\,\pi R^2 = (3+\sqrt{2})\pi R^2$.

g)	$S = \pi R^2 + 2\pi R^2 + \sqrt{2}\,\pi R^2 = (3+\sqrt{2})\pi R^2$ 2/30