Prova scritta di Matematica II - 29 marzo 2007 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per $(1,1,1)$ e ortogonale a $(2,-3,5)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(0,-1,1)$, $(4,0,0)$, $(1,-2,0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(5,1,1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t+3, 2\,t-2, 0)$.

1.a.d. quale relazione geometrica osserviamo tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3?

Il piano Π_1 passante per $(1,1,1)$ e ortogonale a $(2,-3,5)$ avrà equazione $(x,y,z)\cdot(2,-3,5) = (1,1,1)\cdot(2,-3,5)$ ossia $2\,x-3\,y+5\,z = 4$.

Assumiamo che il piano Π_2 sia descrivibile tramite un'equazione della forma $a\,x+b\,y+c\,z = 1$. La condizione del passaggio per $(4,0,0)$ impone $a = 1/4$, a questo punto la condizione del passaggio per $(1,-2,0)$ impone $b = -3/8$, ed infine la condizione del passaggio per $(0,-1,1)$ impone $c = 5/8$. Moltiplicando tutto per 8 otteniamo $2\,x-3\,y+5\,z = 8$.

Il piano Π_3 passante per $(5,1,1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t+3, 2\,t-2, 0)$ contiene in particolare i punti $P(1) = (6,0,0)$ e $P(-1) = (0,-4,0)$ ed è ortogonale al vettore $(3,2,0)\wedge[(5,1,1)-(0,-4,0)] = (3,2,0)\wedge(5,5,1) = (2,-3,5)$ in quanto il vettore $(3,2,0)$ esprime la direzione della retta $P(t)$, contenuta nel piano. Poichè $(2,-3,5)\cdot(6,0,0) = 12$, possiamo descrivere il piano Π_3 con l'equazione $2\,x-3\,y+5\,z = 12$.

Π_1: 2 x -3 y +5 z = 4	i tre piani Π_1, Π_2 e Π_3
Π_2: 2 x -3 y +5 z = 8	sono PARALLELI
Π_3: 2 x -3 y +5 z = 12	1+1+1+1/30

Un metodo alternativo per la determinazione di Π_3 poteva essere quello di ottenere 2 piani la cui intersezione individuasse la retta $P(t)$, e da essi, tramite l'introduzione di un parametro α, ottenere la famiglia dei piani contenenti la retta $P(t)$; infine, determinare il valore di α con la condizione di passaggio per il punto $(5,1,1)$. Questa strada é piú lunga ma vi consiglio comunque, in fase di preparazione al tema, al provare strade ed approcci diversi ad uno stesso esercizio. Sarebbe riduttivo dover fare affidamento su un metodo, quando invece i metodi sono nostre creature e molto abbiamo da imparare dal confrontarli ed analizzarli mettendone in evidenza vantaggi, svantaggi ed aspetti comuni, arrivando infine a denudarne gli aspetti essenziali come distillati dalle necessitá della parete da arrampicare, natura stessa del problema da risolvere. I soli veri matematici siamo noi e l'esame va inteso come un'utile occasione per dedicare del tempo a questi giochi formativi.

1.b. In un riferimento Cartesiano x,y,z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (1,2,0) \qquad Q = v = (0,1,2) \qquad T = w = (2,0,1)\,.$$

1.b.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1}_{1} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{+8} + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}_{0} - 0 - 0 - 0 = 9$$

1/30

1.b.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0,1,2) - (1,2,0) = (-1,-1,2)$ e $\vec{PT} = (2,0,1) - (1,2,0) = (1,-2,1)$, ossia metà della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (-1,-1,2) \wedge (1,-2,1) = (3,3,3)$. In effetti $(3,3,3)$ è ortogonale (= prodotto scalare nullo) sia a $(-1,-1,2)$ che a $(1,-2,1)$ il che mi vale come prova del nove per il prodotto vettoriale computato. Pertanto, $Area(PQT) = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$$\text{Area}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = \tfrac{1}{2}||(3,3,3)|| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$$

1/30

1.b.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

La distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q corrisponde all'altezza del triangolo PQT rispetto alla base $\overline{PQ}$. Conviene avvalersi di quanto calcolato al punto precedente.

$$d(T, r_{PQ}) = \frac{2 \cdot \text{Area}(PQT)}{||\vec{PQ}||} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad d(P, r_{QT}) = \frac{3\sqrt{3}}{||(2,-1,-1)||} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (0,0,1)$ e la retta R di equazioni $z = 2 - y$ e $z = 2 - x$. Esprimere R in forma parametrica.

Conviene innanzittutto esprimere R in forma parametrica. Prendendo $z = t$ si perviene alla seguente scrittura in forma parametrica.

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Ora che il generico punto $R(t)$ di R è espresso in dipendenza di un singolo parametro t, possiamo minimizzare $d(P, R(t)) = \sqrt{((2-t)-0)^2 + ((2-t)-0)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{3\,t^2 - 10\,t + 9}$. che equivale a minimizzare il funzionale $g(t) = 3\,t^2 - 10\,t + 9$ dacchè la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente. Il minimo si ha per $t = \frac{5}{3}$ come si può evidenziare imponendo $0 = g'(t) = 6\,t - 10$. Il punto di R che minimizza $g(t)$ è pertanto $Q = (1/3, 1/3, 5/3)$. Mentre $g(5/3) = \frac{2}{3}$ A questo punto, $d(P,R) = d(P,Q) = \sqrt{g(5/3)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Una strada alternativa avrebbe potuto essere la seguente. Si scelgono 2 punti qualsiasi della retta R, come ad esempio i punti $A = (0,0,2)$ e $B = (1,1,1)$, e si ottengono i vettori $\vec{PA} = (0,0,1)$ e $\vec{PB} = (1,1,0)$. A questo punto si calcola l'area del triangolo ABP come $\text{Area}(ABP) = \frac{1}{2}||\vec{PA} \wedge \vec{PB}|| = \frac{1}{2}||(-1,1,0)|| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Infine, osservando che $d(P,R)$ misura l'altezza del triangolo ABP rispetto alla base AB, ed osservando che la lunghezza di tale base è pari a $\sqrt{3}$, otteniamo $d(P,R) = \frac{2\,\text{Area}(ABP)}{|AB|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$R: \begin{cases} x &= 2 \quad -t \\ y &= 2 \quad -t \\ z &= \quad\quad t \end{cases} \qquad d(P,R) = \sqrt{3\,(5/3)^2 - 10\,(5/3) + 9} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 1$, $y = 1$, $z = 2\,t$ e $x = -1$, $y = 165\sqrt{2}\,s + \sqrt{3}$, $z = 1$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(0,0,1) \wedge (0,1,0) = (-1,0,0)$, che è un versore (ossia ha lunghezza unitaria). Pertanto, dove $(1,1,0)$ è un qualsiasi punto della retta R_1 e $(-1,0,1)$ è un qualsiasi punto della retta R_2, allora la distanza tra R_1 ed R_2 è data da $|(-1,0,0)\cdot(1,1,0) - (-1,0,0)\cdot(-1,0,1)| = |(-1,0,0)\cdot(2,1,-1)| = 2$.

In effetti la retta R_1 è contenuta nel piano $\Pi_1 :\ x = 1$ mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $\Pi_2 :\ x = -1$. Il fatto che le due rette siano sghembe implica a questo punto che la loro distanza sia pari alla distanza tra Π_1 e Π_2.

$$d(R_1, R_2) = |(-1,0,0)\cdot(2,1,-1)| = 2$$

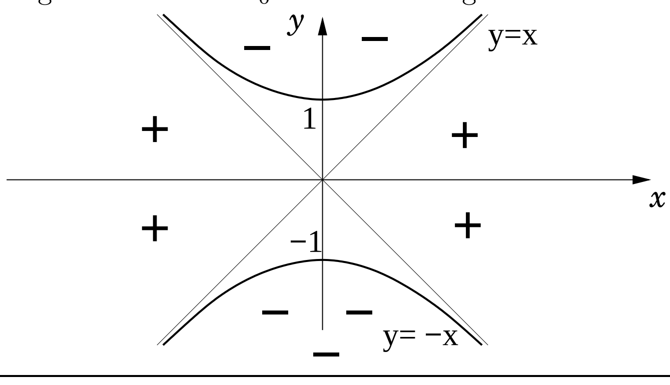
4/30

2. È data la funzione $F(x,y) = 5\,(y-x)^2 + 10\,y(x-y) + 5$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di Σ_0. La funzione $F(x,y) = 5\,(y-x)^2 + 10\,y(x-y) + 5 = 5(x^2 - y^2 + 1)$ si annulla in corrispondenza dei punti dell'iperbole equilatera $y^2 - x^2 = 1$. Quindi $\Sigma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\ \}$ è convenientemente catturato dalla scrittura $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\ \}$ e suddivide il piano nelle 3 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 10\,x$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -10\,y$ e l'origine è pertanto il solo punto stazionario in quanto il solo punto (x,y) che soddisfa al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10\,x & = & 0 \\ -10\,y & = & 0 \end{array} \right.$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente. Si noti che $F(0,0) = 5$, mentre $F(\varepsilon, 0) = 5 + 5\varepsilon^2$ e $F(0,\varepsilon) = 5 - 5\varepsilon^2$ per ogni valore ε; se ne deduce che $(0,0)$ è punto di sella. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde: si calcolano $F_{x,x} := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10$, $F_{y,y} = -10$, e $F_{x,y} = 0 = F_{y,x}$, e si compone quindi la matrice Hessiana

$$H_F = \left| \begin{array}{cc} F_{x,x} & F_{x,y} \\ F_{y,x} & F_{y,y} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{rr} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{array} \right| .$$

Si noti che il determinante della matrice Hessiana vale -100 in tutti i punti del piano (il che ci ricorda che la nostra F era una quadrica), ed in particolare nel punto stazionario $(0,0)$, che pertanto è di sella (poichè $-100 < 0$).

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$.

Il punto $(0,0)$ è punto di sella.

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,1,5)$.

In effetti il punto $(1,1,5)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,1) = 5$. Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali $F_x = 10\,x$ e $F_y = -10\,y$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,1)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nell'intorno del punto $(1,1)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,1) = F_x(1,1)\,(x-1) + F_y(1,1)\,(y-1)$ ed otteniamo l'equazione $z - 5 = 10\,(x-1) - 10\,(y-1)$, che si semplifica in $10\,x - 10\,y - z = -5$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1,1,5)$ appartenga a tale piano.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1,2,2)$:

$10\,x - 10\,y - z = -5$

2/30

2.d. Determinare tutti gli estremi di F nella regione $R = \{ (x, y) \ : \ 9\,x^2 + 4\,y^2 - 36 \leq 0 \}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x, y) = 9\,x^2 + 4\,y^2$ e g_x e g_y ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 10\,x & = F_x = \lambda g_x = & 18\,\lambda\,x \\ -10\,y & = F_y = \lambda g_y = & 8\,\lambda\,y \\ 9\,x^2 + 4\,y^2 & = g(x, y) = & 36\,. \end{cases}$$

La terza equazione impone che $x \neq 0$ o $y \neq 0$, ossia che $\lambda = 10/18 = 5/9$ o $\lambda = -10/8 = -5/4$, dove non entrambe le cose possono valere. Abbiamo pertanto 2 possibilità:

$\lambda = 5/9$ in questo caso, $y = 0$ dalla seconda equazione, e $x = \pm 2$ dalla terza equazione. Qui $F(\pm 2, 0) = 25$.

$\lambda = -5/4$ in questo caso, $x = 0$ dalla prima equazione, e $y = \pm 3$ dalla terza equazione. Qui $F(0, \pm 3) = -40$.

Resta chiara quale sia l'attribuzione dei ruoli di massimo e minimo (tutti di necessità assoluti) tra questi punti.

2.d)

2 Minimi Assoluti: $(0, \pm 3)$, ; $F(0, \pm 3) = -40$

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2, 0) = 25$

5/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x, y) := \sqrt{5\,x^2 - 5\,y^2 + 5}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$D[h] = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 + 1 \geq 0 \ \big\}$

h è ben definita nelle falde dell'iperbole 1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x, y) = \sqrt{5\,x^2 - 5\,y^2 + 5}$ nella regione $R = \big\{ (x, y) \in D[h] \ : \ 9\,x^2 + 4\,y^2 - 36 \leq 0 \ \big\}$.

Osservato che $h(x, y) = \sqrt{F(x, y)}$, e considerato che la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

Infiniti Minimi Assoluti dove $h(x, y) = 0$: ogni punto in $\Sigma_0 \cap R$

2 Massimi Assoluti: $(\pm 2, 0)$; $h(\pm 2, 0) = \sqrt{25}$

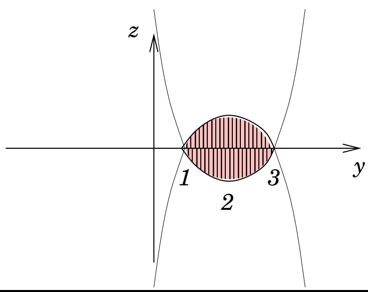
2/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $x = 0$ delimitata dai paraboloidi $z = 5 - (y-2)^2 - (x-2)^2$ e $z = -5 + (y-2)^2 + (x-2)^2$. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia R l'intersezione tra M_E ed il piano $z = 1$.

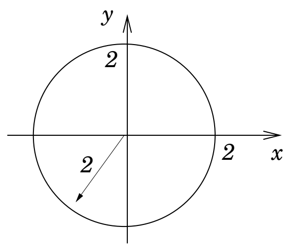
- **3.a.** Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);
- **3.b.** Esprimere M_E in coordinate cilindriche ed R in coordinate Cartesiane;
- **3.c.** Calcolare il volume di M_E mediante integrazione;
- **3.d.** Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_E} z + xy \; dx\, dy\, dz$;
- **3.e.** Calcolare la lunghezza L di R ed impostare un integrale per il computo della superfice S di M_E.

Quando intersechiamo i paraboloidi $z = 5-(y-2)^2-(x-2)^2$ e $z = -5+(y-2)^2+(x-2)^2$ con il piano $x = 0$ otteniamo le parabole $z = 1 - (y-2)^2$ e $z = -1 + (y-2)^2$. La regione del piano $x = 0$ delimitata tra queste 2 parabole è E, come illustrato in figura. Se noi ruotiamo la superfice E attorno all'asse delle z otteniamo una ciambella come solido di rotazione. I punti più alti della ciambella hanno quota $z = 1$ e sono disposti lungo una circonferenza di raggio 2. Questa circonferenza è ciò che si ottiene quando si interseca la ciambella con il piano tangente $z = 1$. La ciambella era zuccherata (oppure, se vi piace il fritto, unta), e quindi quando le abbiamo appoggiato sopra un foglio rigido di carta ($z = 1$) abbiamo lasciato una traccia sul foglio, che ora resta appesa come disegno di R nella figura, sulla destra.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



1+1/30

b)

$$M_E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; |z| \leq 1 - (\rho - 2)^2 \right\}$$

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 1,\; x^2 + y^2 = 4 \right\}$$

1+1/30

Vista la simmetria cilindrica di M_E, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate polari ed osservare che precisamente metà del volume di M_E galleggia al di sopra del piano $z = 0$. Così il computo del volume V di M può essere condotto come segue.

$$V \;=\; 2\int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(1 - (\rho-2)^2\right)\, \rho\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 4\,\rho^2 - \rho^3 - 3\,\rho \; d\rho$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi \left[\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{3}{2}\rho^2\right]_1^3 = \left[\frac{16}{3}\rho^3 - \rho^4 - 6\rho^2\right]_1^3 \pi \\
&= \left(144 - 81 - 54 - \frac{16}{3} + 1 + 6\right)\pi = \frac{32}{3}\pi\,.
\end{aligned}
$$

c)

$V = 2\int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(1-(\rho-2)^2\right)\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{32}{3}\pi$

4/30

Per il computo di I conviene scomporre $I = \int_{M_E} z + xy\; dV$ come $\int_{M_E} z\; dV + \int_{M_E} xy\; dV$ ed osservare che il solido M_E gode delle seguenti simmetrie:

1. $(x,y,z) \in M_E$ se e solo se $(x,y,-z) \in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} z\; dV = 0$.
2. $(x,y,z) \in M_E$ se e solo se $(x,-y,z) \in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} xy\; dV = 0$.

d)

$I = \int_{M_E} z\; dV + \int_{M_E} xy\; dV = 0 + 0 = 0$

4/30

Chiaramente $L = 4\pi$ visto che R è una circonferenza di raggio 2. Per il computo della superfice S della ciambella M conviene raddoppiare la superfice della ciambella posta al di sopra del piano $z=0$. Tale superfice superiore è descritta dall'equazione $z = Z(x,y) := 5-(y-2)^2-(x-2)^2$. Pertanto, dove $Z_x := \frac{\partial Z}{\partial x} = -2\,(x-2)$ e $Z_y := \frac{\partial Z}{\partial y} = -2\,(y-2)$, possiamo impostare il seguente integrale.

e)

$L = 4\,\pi \qquad S = 2\int_{1\leq x^2+y^2\leq 9} \sqrt{1+(Z_x)^2+(Z_y)^2}\, dx\, dy$

1+2/30

All'integrale impostato nel riquadro si perviene utilizzando la Formula 7 a pag. 293 del testo.

Una strada alternativa per impostare l'integrale per il computo ancora una volta della metà superiore di S sarebbe quella di considerare tale superfice come prodotta dalla rotazione attorno all'asse z dell'arco di parabola $z = 1-(y-2)^2$ compreso tra i punti $(1,0)$ e $(3,0)$ nel piano $y-z$. Si noti che stiamo ruotando attorno all'asse delle z (variabile dipendente) e non attorno all'asse delle y (variabile indipendente). Non vale pertanto la Formula 7 a pag. 293 del testo, ma possiamo però rimpiazzare tale formula generale con la seguente:

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx\,.$$

Applicando tale formula "rivista" si perviene alla scrittura

$$S = 2\int_1^3 (2\pi\, y)\sqrt{1+\frac{dz}{dy}}\, dy\,,$$

dove $\frac{dz}{dy} = -2\,(y-2)$.