.....................- Matematica 1 - 25/02/2009-FILA A

COGNOME E NOME ....

N. di matricola .... **FIRMA**....................

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}.$$

Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, monotonia.

10/30

Si tratta di una funzione razionale che risulta definita imponendo che il denominatore sia diverso da zero, quindi nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. La funzione non presenta simmetrie! Ha intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. Risulta negativa negli intervalli $]-2, \frac{1}{2}]$ e $[1, 2[$. L'intersezione con l'asse delle ordinate avviene nel punto $x = -\frac{1}{4}$. La funzione é continua nel suo dominio. La retta di equazione $x = -2$ é un asintoto verticale a sinistra in alto e a destra in basso, mentre la retta di equazione $x = 2$ é un asintoto verticale a sinistra in basso e a destra in alto. La retta di equazione $y = 2$ é un asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra. La funzione é infinite volte derivabile e $f'(x) = \frac{3(x^2-6x+4)}{(x^2-4)^2}$. Nel punto $3 - \sqrt{5}$ vi é un massimo relativo proprio con ordinata $\frac{-9\sqrt{5}+20}{-6\sqrt{5}+10}$ il cui valore é approssimativamente pari a $0,036$. Nel punto $3+\sqrt{5}$ vi é un minimo relativo proprio con ordinata $\frac{9\sqrt{5}+20}{6\sqrt{5}+10}$ il cui valore é approssimativamente pari a $1,713$. La funzione non é dotata di massimoi e minimi assoluti in quanto non é né superiormente né inferiormente limitata.

2. $I = \int \frac{2x^4+x^3+3x^2+1}{x(x^2+1)^2} dx$

8/30 Cerchiamo una decomposizione in fratti semplici

$$\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

Passando a denominatore comune ed uguagliando i numeratori si ottiene $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$, $E = 1$. Quindi $\int \frac{2x^4+x^3+3x^2+1}{x(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1} dx$. Integrando per parti $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + c$. E quindi il risultato é $\ln|x| + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$.