Prova scritta di Matematica II - 24 gennaio 2012 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(3\pi, 2\pi, 0)$, $(3\pi, 2\pi, 1)$ e $(6, 4, 1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente il punto $P = (0, 1, 0)$ e la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 5$ nel punto $(1, 1, 0)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $2\,x - 3\,y = 0$ che é quindi equazione che caratterizza il piano Π_1.

Se il piano Π_2 contiene la retta $3\,x+2\,y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $3\,x+2\,y = 1$ e $z = 1$, ossia $3\,\alpha x+2\,\alpha y+\beta z = 1(\alpha+\beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $3\,x+2\,y+\beta z = 1+\beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento del punto $P = (0, 1, 0)$, che comporta $2 = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $3\,x + 2\,y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x, y) = 3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 5$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1, 1, 0)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(6, 4, 2)$, che preferiamo rimpiazzare con $(3, 2, 1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(3, 2, 1)$ e passante per $(1, 1, 0)$. Il generico punto (x, y, z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(3, 2, 1)$ eguaglia quello di $(1, 1, 0)$, che é 5.

Π_1: $2\,x - 3\,y = 0$

Π_2: $3\,x + 2\,y + z = 2$

Π_3: $3\,x + 2\,y + z = 5$

Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per $(0, 0, 0)$ ed incidente ortogonalmente nella retta $R'(t) = (0, 1 + t, 1 + 2\,t)$.

La retta R sarà contenuta nel piano ortogonale a $(0, 1, 2)$ e passante per $(0, 0, 0)$, ossia nel piano $y + 2\,z = 0$ e passerà, oltre che per $(0, 0, 0)$, anche per il punto di R' contenuto in tale piano, dato da $(1+t)+2\,(1+2\,t) = 0$, quindi da $t = -\frac{3}{5}$, e quindi $\left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (0, 2\,t, -t)$. É facile verificare sia il passaggio per $(0, 0, 0)$ che l'ortogonalitá.

$R(t) = (0, 2\,t, -t)\,.$

3/30

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette $R_1(t) = (t, t, t)$ ed R_2 di equazioni $x + y = 0$, $z = 3$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = s$, R_2 trova una riscrittura parametrica come $R_2(s) = (s, -s, 3)$, ed é ora evidente che le rette non sono parallele né si incontrano. Quindi sono sghembe, non possono appartenere ad uno stesso piano.

Un ovvio vettore ortogonale ad entrambe é $(1, 1, -2)$, dove l'ortogonalitá alla direzione $(1, -1, 0)$ di R_2 ha imposto l'eguaglianza delle due prime componenti (che abbiamo a quel punto preferito assumere unitarie) e l'ortogonalitá alla direzione $(1, 1, 1)$ di R_1 ha determinato l'ultima componente. Un versore ortogonale ad entrambe le rette é pertanto $V = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Prendiamo ora un punto qualsiasi di R_1, quale $R_1(0) = (0, 0, 0)$ ed un punto qualsiasi di R_2, quale $R_2(0) = (0, 0, 3)$ e moltiplichiamo scalarmente lo spostamento $(0, 0, 3) - (0, 0, 0) = (0, 0, 3)$ per il versore V ottenendo, a meno di segno, la distanza $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$. I due punti che attengono questa distanza sono $(0, 0, 3)$ di R_2, che si intuisce per visualizzazione nello spazio della situazione, contro $(1, 1, 1)$ di R_1, che si deduce poi muovendosi da $(0, 0, 3)$ in direzione $(1, 1, -2)$ fino a sbarco su R_1. Il computo della distanza torna e la visualizzazione geometrica convince, mi sa che ci siamo.

$d(R_1, R_2) = d((1, 1, 1), (0, 0, 3)) = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.
le rette R_1 e R_2 sono sghembe 3+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = y(x - y)^2 + x^2y^2 - (x^2 + y^2)y - x^2 + 2x$.

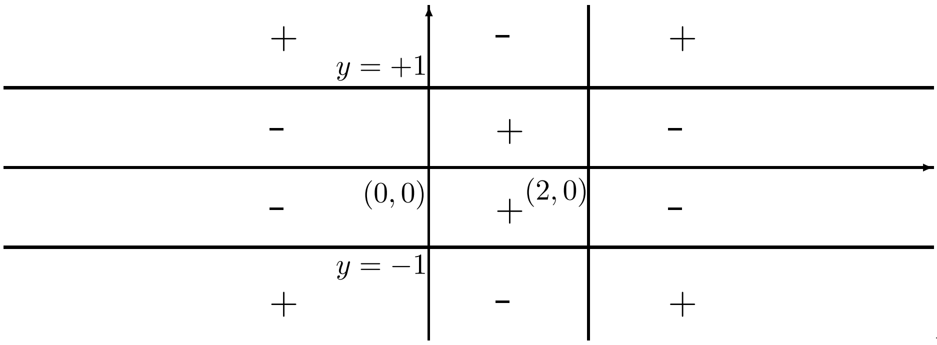
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= y(x-y)^2 + x^2y^2 - (x^2+y^2)y - x^2 + 2x \\ &= x^2y - 2\,xy^2 + y^3 + x^2y^2 - x^2y - y^3 - x^2 + 2x \\ &= x^2y^2 - 2\,xy^2 - x^2 + 2\,x \\ &= x(x-2)(y+1)(y-1)\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = x(x - 2)(y + 1)(y - 1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x - 2)$ o $(y + 1)$ o $(y - 1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = 2 \vee y = \pm 1\}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 9 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. La sola regione centrale è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x^2y^2 - 2\,xy^2 - x^2 + 2\,x = x(x-2)(y+1)(y-1)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)(y+1)(y-1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,xy(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)(y+1)(y-1) &= 0 \\ 2\,xy(x-2) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, \pm 1)$, $(2, \pm 1)$ e $(1, 0)$. Si noti che 4 dei 5 punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che essi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso. Il quinto punto stazionario $(1, 0)$, sempre senza dover fare il test delle derivate seconde, deve essere un punto di massimo locale perché su ogni regione chiusa e limitata una F continua deve avere massimo e minimo.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

4 PUNTI DI SELLA: $(0, \pm 1)$ e $(2, \pm 1)$.

1 PUNTO DI MASSIMO LOCALE: $(1, 0)$ con $F(1, 0) = 1$.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_{-1}, dove, per $i = 0, \pm 1$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(0, i, 0)$;

In effetti, per $i = -1, 0, 1$, il punto $(0, i, 0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(0, i) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0, 1)$ e $(0, -1)$ sono punti stazionari, i piani Π_1 e Π_{-1} sono orrizzontali, ed essendo disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti entrambi dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_0. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(0,0) = F_x(0,0)\,(x-0) + F_y(0,0)\,(y-0)$ ed otteniamo l'equazione $z = 2\,(x) + 0\,(y)$, che si semplifica in $z = 2\,x$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari $(0, \pm 1)$ stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0,-1)$ a $(0,1)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 2\,x$ Π_1: $z = 0$ Π_{-1}: $z = 0$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 3\}$.

Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R, e pertanto il piano è di andarli a stanare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ e $g_x = 2\,x - 2$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,(x-1)(y+1)(y-1) & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ 2\,xy(x-2) & = F_y = \lambda g_y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 - 2\,x & = g(x,y) & = & 3\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo di fatto assumere $\lambda \neq 0$. Nel massaggiare e combinare opportunamente le equazioni, meglio vederci, e vale pertanto la pena spendere l'osservazione preliminare che R altro non è che un cerchio con centro nel punto $(1,0)$ e raggio 2. Conviene rappresentarsi la regione R in concomitanza alla studio del segno per raccogliere informazioni ed idee. La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto in ciascuna delle regioni in cui il piano viene cosí suddiviso, ed in particolare sará rilevante individuare i massimi nelle regioni contrassegnate con un $+$ ed i minimi nelle regioni contrassegnate con un $-$. Come dicevamo sopra, ci interessano ora solo le 8 regioni contornate dal cerchio bordante R. Inoltre, poiché le simmetrie $F(x,y) = F(x,-y)$ e $F(1-x,y) = F(1+x,y)$ sono anche proprie della regione R, le regioni sostanzialmente diverse sono solo 3, con 2 di esse (etichettate $-$) che hanno un gemello ed 1 di esse (etichettata $+$)con 3 gemelli. A questo punto non dovrebbe sorprendere che la prima equazione sia automaticamente soddisfatta in corrispondenza di $x = 1$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $y = \pm 2$; a questo punto il soddisfacimento della seconda equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente, risulta evidente che i poli sud e nord del cerchio siano punti estremali, con $F(1, \pm 2) = -3$. Analogamente, la seconda equazione risulta automaticamente soddisfatta per $y = 0$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $x = 1 \pm 2$; a questo punto il soddisfacimento della prima equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente, risulta evidente che i poli est ed ovest del cerchio siano punti estremali, con $F(1 \pm 2, 0) = -3$.

L'esclusione di queste due ovvie soluzioni conduce ad una semplificazione delle equazioni ottenuta assumendo $x \neq 1$ ed $y \neq 0$. In effetti, se $x \neq 1$, allora la prima equazione si semplifica in $\lambda = y^2 - 1$, mentre, se $y \neq 0$, la seconda equazione si semplifica in $\lambda = x^2 - 2\,x$, che combinate danno $y^2 = x^2 - 2\,x + 1$, che infornata nella terza equazione porta a conludere che $2\,y^2 = 4$. E da questo $y = \pm\sqrt{2}$, di nuovo combinando con la terza equazione, scaturiscono i 4 gemellini $y = \pm\sqrt{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$, tutti massimi con $F(1 \pm \sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 1$. Ora, con grande coincidenza fortuita, $F(1, 0) = 1$ e pertanto su R abbiamo 5 punti tutti di massimo assoluto.

2.d)

5 Max Assoluti: $(1, 0)$, $(1 \pm \sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ e $(1 \pm \sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ dove $F = 1$

4 Min Assoluti: $(1, \pm 2)$ e $(1 \pm 3, 0)$; $F(1, \pm 2) = F(1 \pm 3, 0) = -3$

6/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia $E = \{(x, y, z) \mid y = 0, z \geq 0, x \geq R, x + z \leq 2\,R\ \}$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

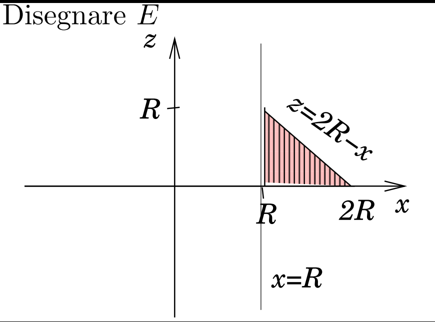
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z\ dx\,dy\,dz$;

3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q.

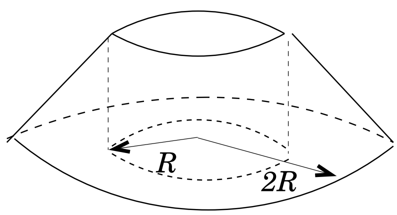
3.f. Quali sarebbero il volume V e le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q qualora $E = \{(x, y, z) \mid y = 0, z \geq x - 2\,R, x \geq R, x + z \leq 2\,R\ \}$?

La figura piana E è, nel piano $y = 0$, il triangolo di vertici $(R, 0)$, (R, R), e $(2\,R, 0)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ R \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\,R - z\}\ \right\}$

cil: $Q = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ R \leq \rho \leq 2\,R - z\ \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \; dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho \, dz \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho \, dz \right) = 2\,\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_R^{2\,R-z} dz \\
&= 2\,\pi \int_0^R 2\,R^2 - 2\,R\,z + \frac{z^2}{2} - \frac{R^2}{2} \; dz = 2\,\pi \left[2\,R^2\,z - R\,z^2 + \frac{z^3}{6} - \frac{R^2\,z}{2} \right]_0^R = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 \,.
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho \, dz \, d\theta = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho \; dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} z\,\rho \; d\rho \, dz \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R z \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho \, dz \right) = 2\,\pi \int_0^R z \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_R^{2\,R-z} d\rho \\
&= 2\,\pi \int_0^R 2\,R^2\,z - 2\,R\,z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{R^2\,z}{2} \; dz = 2\,\pi \left[R^2\,z^2 - \frac{2}{3} R\,z^3 + \frac{z^4}{8} - \frac{R^2\,z^2}{4} \right]_0^R = \frac{5}{12}\,\pi\,R^4 \,.
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} z\,\rho \; d\rho \, dz \, d\theta = \frac{5}{12}\,\pi\,R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{5}{12}\,\pi\,R^4}{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3} = \frac{5}{16}\,R \,.
$$

e) $x_b = 0$ $\qquad$ $y_b = 0$ $\qquad$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{5}{16}\,R$

2/30

Il volume raddoppia e le simmetrie presenti rendono ovvie le coordinate del baricentro.

f) $x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = 0$	$V = \frac{8}{3}\,\pi\,R^3$	2/30