Prova scritta di Matematica II - 7 luglio 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ e $(2,3,1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$ e la retta $x + y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $x^2 - 2\,y + z^2 = 3$ nel punto $(1,-1,0)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $x + y + z = 6$ ed é questa l'equazione che caratterizza il piano Π_1. Verificare per assicurarsene. Si noti che anche l'equazione $x \cdot y \cdot z = 6$ é soddisfatta da tutti e 3 i punti, tuttavia essa non é l'equazione di un piano ma descriverà invece un altro tipo di superfice passante per i 3 punti.

Se il piano Π_2 contiene la retta $x + y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $2\,x + y = 1$ e $z = 1$, ossia $\alpha x + \alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2, se esiste, é quindi $x + y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$, che comporterebbe $1 + 3\,t - 3\,\beta t = 1 + \beta$ per ogni t, la qual condizione non riusciamo a stabilire per nessun β. Sembrerebbe che il piano Π_2 non possa esistere, ossia che le rette assegnate siano sghembe. In effetti le rette non possono essere parallele poiché una vive nel piano $z = 1$ in cui l'altra risulta incidente per $t = -\frac{1}{3}$ E non si incontrano poiché $R\left(-\frac{1}{3}\right) = (1,-2,1)$ non appartiene alla seconda retta.

Il vettore ortogonale alla superfice $F(x,y) = x^2 - 2\,y + z^2 = 3$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1,-1,0)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(2,-2,0)$, che preferiamo rimpiazzare con $(1,-1,0)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(1,-1,0)$ e passante per $(1,-1,0)$. Il generico punto (x,y,z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(1,-1,0)$ eguaglia quello di $(1,-1,0)$, che é 2.

Π_1: $x + y + z = 6$	Π_1 (-) Π_2 (-) Π_3 (H) Π_1
Π_2: non esiste	
Π_3: $x - y = 2$	1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta R incidente ortogonalmente nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x - 2\,y - 2\,z = \pi$.

La retta R passerà per i centri $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ delle due sfere; la sua direzione sarà perció espressa dal vettore $(1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (t,t,t)$.

$R(t) = (t, t, t)$.

3/30

1.c. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $2y = 3z$ e $z = -2x$ e la retta $R_2 = (1 - 2\,t, 2 + t, 1 - t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, -3\,t, -2\,t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, -3, -2)$ e la retta R_2 di direzione $(-2, 1, -1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1, 2, 1)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1) \cdot (1, 2, 1) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe.

2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2)$.

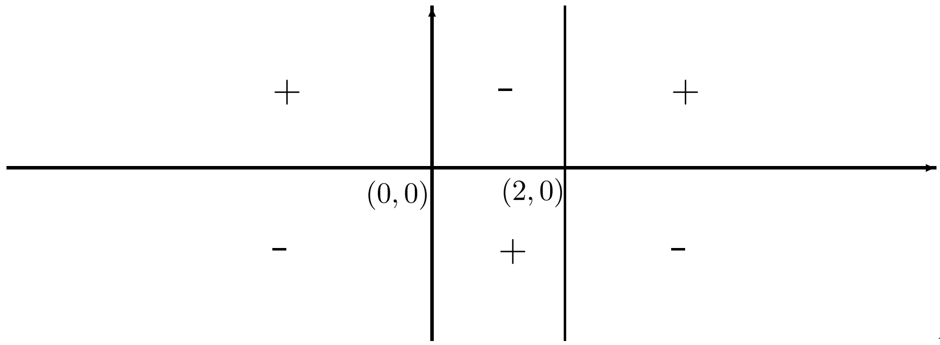
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2) = x^2 - 2\,xy + y^2 + x^2 y - x^2 - y^2 = x^2 y - 2\,xy \\ &= x(x - 2)y\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = x(x - 2)y$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x - 2)$ o y. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = \pm 2 \vee y = \pm 0\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x(x-2)y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e $(2,0)$. Si noti che entrambi i punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che entrambi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

2 PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.

Entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

4/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i,0,0)$;

In effetti, per $i = 0,1,2$, il punto $(i,0,0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(i,0) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0,0)$ e $(2,0)$ sono punti stazionari, i piani Π_0 e Π_2 sono perfettamente orrizzontali, ed essendo entrambi disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_1. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(1,0) = F_x(1,0)\,(x-1) + F_y(1,0)\,(y-0)$ ed otteniamo l'equazione

$z = 0\,(x-1) - 1\,y$, che si semplifica in $z = -y$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0,0)$ a $(2,0)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ $\qquad$ Π_1: $z = -y$ $\qquad$ Π_2: $z = 0$ $\qquad$ 1+1+1/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dagli assi, dalle rette $x = 1$ e $z = 1$, e dalla curva $xz = \frac{1}{4}$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

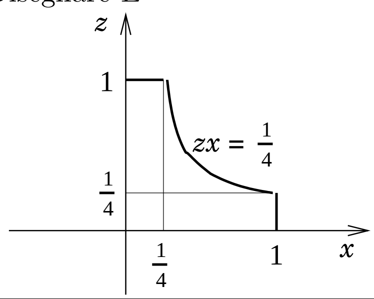
3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

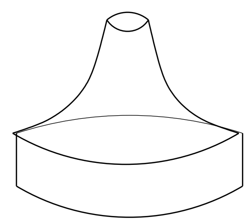
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ z \leq \frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2}} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ z \leq \frac{1}{4\rho} \right\}$ $\qquad$ 1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\min\left\{1, \frac{1}{4\rho}\right\}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho \int_0^{\min\left\{1, \frac{1}{4\rho}\right\}} 1 \; dz\, d\rho \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\,\pi \left(\int_0^1 \rho \left(\min\left\{1, \frac{1}{4\,\rho}\right\}\right) \; d\rho \right) = 2\,\pi \int_0^1 \min\left\{\rho, \frac{1}{4}\right\} \; d\rho \\
&= 2\,\pi \int_0^{\frac{1}{4}} \rho \; d\rho + 2\,\pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4} \; d\rho = 2\,\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}} + 2\,\pi \left[\frac{1}{4}\rho\right]_{\frac{1}{4}}^1 \\
&= 2\,\pi \left[\frac{1}{32} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right] = \frac{7}{16}\pi\,.
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{7}{16}\pi$ 5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\min\left\{1,\frac{1}{4\,\rho}\right\}} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^1 \rho \int_0^{\min\left\{1,\frac{1}{4\,\rho}\right\}} z \; dz\, d\rho\right) = 2\,\pi \left(\int_0^1 \rho \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\min\left\{1,\frac{1}{4\,\rho}\right\}} \; d\rho\right) \\
&= \pi \int_0^1 \rho \left(\min\left\{1, \frac{1}{16\,\rho^2}\right\}\right) \; d\rho = \pi \int_0^1 \min\left\{\rho, \frac{1}{16\,\rho}\right\} \; d\rho \\
&= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \rho \; d\rho + \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{16\,\rho} \; d\rho = \pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}} + \pi \left[\frac{1}{16}\log\rho\right]_{\frac{1}{4}}^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{4}\right) = \pi \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{8}\log 2\right)\,.
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \pi \, \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{8}\log 2\right) \, \pi$ 3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\pi\,\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{8}\log 2\right)}{\frac{7}{16}\pi} = \frac{\frac{1}{2} + \log 4}{7}\,.
$$

e) $x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{2}+\log 4}{7}$ 2/30