Prova scritta di Matematica II - 14 luglio 2009 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(7,-3,-4)$, $(5,5,-10)$ e $(-\pi, \pi+\sqrt{3}, -\sqrt{3})$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R_1(t) = (t, 4\,t, 5\,t)$ e la retta $R_2(t) = (t, 7\,t, 8\,t)$;

1.a.c. piano Π_3 costituito dai punti equidistanti ai piani $x + 2\,y - 3\,z = 1$ e $x + 2\,y - 3\,z = 2$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

(1.a.a) Per tutti e tre i punti abbiamo che $x + y + z = 0$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

(1.a.b) Entrambe le rette passano per l'origine, e quindi il piano Π_2 esiste e passa per l'origine. La direzione normale a Π_2 sará normale alle direzioni di entrambe le rette, quindi $(1,1,-1)$ dovrebbe andar bene. Quindi $x + y - z = 0$.

(1.a.c) I due piani assegnati sono paralleli, e quindi, per questa volta, si tratta semplicemente di infilargliene nel mezzo un terzo: $x + 2\,y - 3\,z = \frac{3}{2}$.

(1.a.d) Il piano Π_1 è ortogonale al piano Π_3 come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(1,1,1)\cdot(1,2,-3) = 0$. La relazione tra i vettori $(1,1,1)$ e $(1,1,-1)$ (tra i piani Π_1 e Π_2) e tra i vettori $(1,1,-1)$ e $(1,2,-3)$ (tra i piani Π_2 e Π_3) è invece generica.

Π_1: $x + y + z = 0$	Π_1 (G) Π_2 (G) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $x + y - z = 0$	
Π_3: $x + 2\,y - 3\,z = \frac{3}{2}$	1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha, 2, \alpha - \beta) \qquad v_2 : (2, \alpha, \alpha - 2\beta) \qquad v_3 : (0, 1, 1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

2.) v_2 e v_3 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Affinchè v_1 sia parallelo a v_2 le prime due componenti di questi vettori devono essere proporzionali: otteniamo $\alpha : 2 = 2 : \alpha$, ossia $\alpha^2 = 4$, da cui $\alpha = \pm 2$. Se $\alpha = 2$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere identici (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\beta = 0$ (dalla terza componente). Se $\alpha = -2$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere opposti (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\alpha - \beta = -(\alpha - 2\beta)$ (per la terza componente) da cui $\beta = \frac{2}{3}\alpha = -\frac{4}{3}$.

Il prodotto scalare $v_2 \cdot v_3 = \alpha + (\alpha - 2\beta) = 2\alpha - 2\beta$ si annulla per $\beta = \alpha$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha & 2 & \alpha - \beta \\ 2 & \alpha & \alpha - 2\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| = \alpha^2 + 2(\alpha - \beta) - 4 - \alpha(\alpha - 2\beta) = 2(\alpha\beta + \alpha - \beta - 2).$$

si annulla ogniqualvolta $\beta = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ (ha senso per $\alpha \neq 1$). L'annullamento del prodotto triplo denuncia la coplanarità tra i tre vettori.

1.) v_1 e v_2 paralleli: per $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ e per $(\alpha, \beta) = (-2, -\frac{4}{3})$

2.) v_1 e v_2 ortogonali: per $\beta = \alpha$

3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: per $\beta = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ (con $\alpha \neq 1$)

1+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R incidente ortogonalmente nelle rette $R_1(t) = (1 + t, t, 2t)$ ed $R_2(t) = (1 + t, 3t, 4t)$.

Fortunatamente R_1 ed R_2 passano entrambe per il punto $(1, 0, 0)$, e quindi anche R passerá per $(1, 0, 0)$. La direzione di R sará quella di $(1, 1, -1)$, che é ortogonale sia alla direzione $(1, 1, 2)$ di R_1 che alla direzione $(1, 3, 4)$ di R_2. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (1 + t, t, -t)$.

$R(t) = (1 + t, t, -t)$.

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $x + y + z = 0$ e $y = 2x$ e la retta $R_2 = (1 - t, t - 1, 1)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, 2t, -3t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, 2, -3)$ e la retta R_2 di direzione $(-1, 1, 0)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1, -1, 1)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

ossia quanto ci si muove nella direzione del versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ (ossia si lavora utilmente) nel passare da P_1 a P_2. Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = x^3\, y + x\, y^3 - x\, y$.

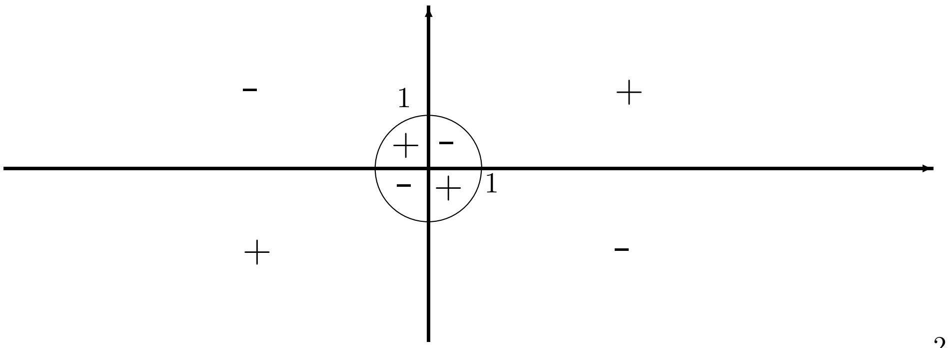
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F.

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^3\, y + x\, y^3 - x\, y && \text{come data} \\ &= x\, y\, (x^2 + y^2 - 1)\,. && \text{dopo ovvio raccoglimento, giá fattorizzata} \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = x\, y\, (x^2 + y^2 - 1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o y o $(x^2 + y^2 - 1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Quattro di queste regioni sono limitate (quelle interne al cerchio).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x^3\, y + x\, y^3 - x\, y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 3\, x^2\, y + y^3 - y$ ed analogamente (visto che $F(x, y) = F(y, x)$) si avrà $F_y := 3\, y^2\, x + x^3 - x$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 3\, x^2\, y + y^3 - y &= 0 \\ 3\, y^2\, x + x^3 - x &= 0\,. \end{cases}$$

Dallo studio del segno di cui al punto precedente possiamo dedurre che i seguenti 5 punti sono delle selle: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$. In effetti é facile verificare che essi, quali punti stazionari, soddisfano alla condizioni di annullamento del gradiente. In particolare, se $x = 0$ allora la seconda equazione é soddisfatta mentre dalla prima ricaviamo $y = 0, \pm 1$. Simmetricamente, se $y = 0$ allora necessariamente $x = 0, \pm 1$. Resta da convincersi che non ci sono soluzioni con $x, y \neq 0$. Sotto questa ipotesi le equazioni divengono $3\,x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $3\,y^2 + x^2 - 1 = 0$ da cui $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ oppure $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ che di necessitá saranno degli estremi: anche l'esistenza di questi 4 ulteriori punti (uno per ciascuna delle 4 regioni limitate) era deducibile dallo studio del segno poichè ogni regione limitata vive almeno un punto di massimo ed uno di minimo. Pertanto ciascuno di questi 4 punti è il punto estremale ricercato nella regione chiusa di sua pertinenza (ossia nel suo quarto di cerchio). Su tutto il piano, questi quattro punti sono dei massimi/minimi relativi, dacchè la F non è limitata. Ora, $F\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ mentre $F\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

2.b) Elencare le selle, i massimi, i minimi:

5 PUNTI DI SELLA: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$.

2 PUNTI DI MAX. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

2 PUNTI DI MIN. RELATIVO: $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ con $F\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.

2+2+2/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, F(i, 0))$;

Chiaramente, il punto $(i, 0, F(i, 0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Tutti e tre i punti appartengono all'asse delle x che appartiene a sua volta a Σ_0, e quindi i tre piani hanno equazioni del tipo

$$z = F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) = F_y(x_0, y_0)\,y\,.$$

Analizziamo ora singolarmente i tre punti. Poichè $(0, 0)$ è punto stazionario, ci attendiamo che Π_0 sia orrizzontale, ossia abbia equazione $z = 0$. Lo stesso vale per Π_1. Nel caso di Π_2, ricordando che $F_y = 3\,y^2\,x + x^3 - x$, otteniamo l'equazione $z = F_y(2, 0)\,y = 6\,y$. Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ $\qquad$ Π_1: $z = 0$ $\qquad$ Π_2: $z = F_y(2, 0)\,y = 6\,y$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2 + y^2 \leq 4$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè i punti stazionari della F sono già stati presi in rassegna, vogliamo ora ricercare quei punti estremali di F che siano situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del cerchio $x^2 + y^2 = 4$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 3\,x^2\,y + y^3 - y &= F_x = \lambda g_x = \quad 2\,\lambda\,x \\ 3\,y^2\,x + x^3 - x &= F_y = \lambda g_y = \quad 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 &= g(x, y) = \quad 4\,. \end{cases}$$

Poichè i punti stazionari sono stati ormai tutti individuati possiamo limitarci ad assumere $\lambda \neq 0$. Ora, se $x = 0$, allora $y = \pm 2$ segue dalla terza equazione, mentre, in contraddizione $y = 0, \pm 1$ segue dalla prima. Simmetricamente, se $y = 0$ allora $x = \pm 2$ dalla terza é in contraddizione con $x = 0, \pm 1$ dalla seconda. Invece, se $x, y \neq 0$ allora moltiplicano la prima equazione per y e la seconda per x, ed eguagliandole, otteniamo $y^4 - y^2 = x^4 - x^2$ da cui possiamo dedurre $x = \pm y$. Quindi le soluzioni sono $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ e $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$.

Internamente alla regione abbiamo pertanto due massimi assoluti con $F(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 6$ e due minimi assoluti con $F(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = -6$. Anche questa volta un'analisi delle simmetrie in gioco conferma la giustezza di queste 4 radici caleidoscopiche.

2.d)

2 Massimi Assoluti: $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

dove $F = 6$

2 Minimi Assoluti: $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$

dove $F = -6$

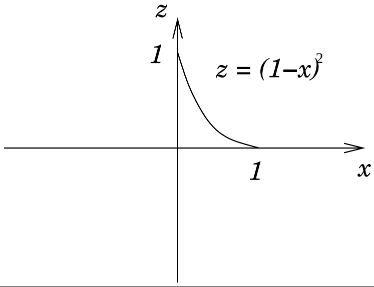
5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dagli assi e dalla curva $z = (x-1)^2$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

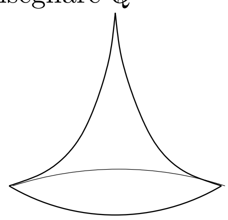
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);
3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E, situata nel primo quadrante, è contornata dalle rette $x = e$ e $z = e$ e da un ramo dell'iperbole equilatera $xz = 1$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + \rho^2 - 2\rho \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} 1 \; dz\, d\rho\right) \\
&= 2\,\pi\left(\int_0^1 \rho(1+\rho^2-2\,\rho)\; d\rho\right) = 2\,\pi\left[\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}-\frac{2}{3}\rho^3\right]_0^1 \\
&= 2\,\pi\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right] = \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

c) $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{6}$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z \; dz\, d\rho\right) = \pi\left(\int_0^1 \rho(1+\rho^2-2\,\rho)^2\; d\rho\right) \\
&= \pi\left(\int_0^1 \rho^5-4\,\rho^4+6\,\rho^3-4\,\rho^2+\rho\; d\rho\right) = \pi\left[\frac{\rho^6}{6}-\frac{4}{5}\rho^5+\frac{3}{2}\rho^4-\frac{4}{3}\rho^3+\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \pi\left[\frac{1}{6}-\frac{4}{5}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right] = \frac{10-48+90-80+30}{60}\,\pi = \frac{1}{30}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

d) $I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{30}\,\pi$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{30}\,\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}\,.$$

e) $x_b = 0$ $y_b = 0$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{1}{5}$

2/30