Prova scritta di Matematica II - 21 gennaio 2009 - CORREZIONE Fila C

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(\pi, \sqrt{2}, 1+\pi)$, $(\sqrt{2}, \pi, 1+\sqrt{2})$ e $(10, 0, 11)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R_1(t) = (2, 3, t)$ ed ortogonale alla retta $R_2(t) = (2\,t, 2\,t, 1)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(1, 2, \pi)$ e senza punti in comune con il piano $x + z = 0$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $z = x + 1$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

Il piano Π_2 è ortogonale alla direzione $(2, 2, 0)$ di $R_2(t)$ ed ha pertanto equazione della forma $x + y = c$. Il valore della costante c resta determinato dalla condizione di contenimento di $R_1(t)$: $2 + 3 = c$.

Essendo parallelo al piano $x + z = 0$, il piano Π_3 ha equazione della forma $x + z = c$. La condizione di passaggio per il punto $(1, 2, \pi)$ ci dice che $c = \pi + 1$.

Si noti che entrambi i piani Π_1 e Π_3 contengono una retta parallela all'asse delle y (la y non compare nelle loro equazioni) mentre la normale a Π_2 punta in direzione generica rispetto all'asse delle y. Quindi Π_2 è in posizione generica rispetto ai piani Π_1 e Π_3, che sono invece ortogonali tra loro come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(1, 0, -1) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

Π_1: $z = x + 1$

Π_2: $x + y = 5$

Π_3: $x + z = \pi + 1$

Π_1 (G) Π_2 (G) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Date le 3 rette:

$$R_1(t) : (1 + \alpha\,t + \beta\,t, \beta\,t, 3\,t) \qquad R_2(t) : (\alpha\,t + \beta\,t, -\beta\,t, t) \qquad R_3(t) : (\beta\,t, 5, t)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.1.) R_1 e R_2 sono parallele; 1.2.) R_2 e R_3 parallele; 1.3.) R_1 e R_3 parallele;

2.) R_1 e R_2 sono incidenti;

3.) R_2 e R_3 sono sghembe.

Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione. Si denotino con $v_1 = (\alpha + \beta, \beta, 3)$, $v_2 = (\alpha + \beta, -\beta, 1)$ e $v_3 = (\beta, 0, 1)$ i vettori che esprimono le direzioni delle rette R_1, R_2 e R_3, rispettivamente. La prima delle tre domande chiede di indagare le relazioni di parallellismo tra questi 3 vettori. Affinchè v_1 sia parallelo a v_2, ossia $v_1 = \lambda v_2$, dovremo avere che $\lambda = 3$ (dal rapporto delle terze componenti di v_1 e v_2) e quindi $\beta = 0$

(seconde componenti) e $\alpha = 0$ (prime componenti). Similmente, affinchè v_3 sia parallelo a v_2 dovremo avere che $\beta = 0$ (seconde componenti) e $\alpha = 0$ (prime componenti). Anche il parallellismo di v_1 e v_3 richiede $\alpha = \beta = 0$.

Le rette R_1 ed R_2 sono incidenti se esiste una coppia di valori s e t tali che $R_1(s) = (1 + \alpha\, s + \beta\, s, \beta\, s, 3\, s) = (\alpha\, t + \beta\, t, -\beta\, t, 1\, t) = R_2(t)$. Dal confronto delle terze coordinate segue $3\, s = t$ e quindi si chiede per quali valori di α e β $(1 + \alpha\, s + \beta\, s, \beta\, s) = (3\, \alpha\, s + 3\, \beta\, s, -3\, \beta\, s)$ per un qualche s. Quindi, dal confronto delle seconde componenti, si hanno 2 casi: o $s = 0$ ma poi non si riesce ad ottenere uguaglianza anche sulle prime componenti o $\beta = 0$ e quindi per ogni valore di $\alpha \neq 0$ esiste un qualche valore di s che rende uguali anche le prime componenti. Quindi R_1 ed R_2 sono incidenti per $\beta = 0 \neq \alpha$.

Due rette sono sghembe precisamente quando non sono parallele e non hanno punti in comune. La prima condizione è rispettata eccetto per $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Inoltre le rette R_2 ed R_3 sono incidenti se esiste una coppia di valori s e t tali che $R_3(s) = (\beta\, s, 5, 1\, s) = (\alpha\, t + \beta\, t, -\beta\, t, 1\, t) = R_2(t)$. Dal confronto delle terze coordinate segue $s = t$ e quindi si chiede per quali valori di α e β $(\beta\, s, 5) = (\alpha\, s + \beta\, s, -\beta\, s)$ per un qualche s. Quindi $\alpha = 0$ dal confronto delle prime componenti, e poi per ogni valore di $\beta \neq 0$ esiste un qualche valore di s che rende uguali anche le secondi componenti. Quindi R_3 ed R_2 sono incidenti per $\alpha = 0 \neq \beta$. Quindi R_2 ed R_3 sono sghembe per $\alpha \neq 0$.

1.) $R_1 \parallel R_2$: $\alpha = \beta = 0$ $\quad$ $R_2 \parallel R_3$: $\alpha = \beta = 0$ $\quad$ $R_1 \parallel R_3$: $\alpha = \beta = 0$

2.) $R_1 \times R_2$: per $\beta = 0 \neq \alpha$

3.) $R_2 \asymp R_3$: per $\alpha \neq 0$

1+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R contenuta nei piani $x + z = 5$ e $x + 2\,y + 3\,z = 1$.

La direzione della retta R è ortogonale sia alla normale $(1, 0, 1)$ al piano $x + z = 5$ che alla normale $(1, 2, 3)$ al piano $x + 2\,y + 3\,z = 1$. Si noti che il vettore $(1, 1, -1)$ soddisfa ad entrambe le condizioni di ortogonalità e quindi ben rappresenta la direzione di R. Per determinare completamente R resta da individuare un qualsiasi punto di passaggio. Ponendo $z = 0$ otteniamo $x = 5$ dall'appartenenza al primo piano, e quindi $y = -2$ dall'appartenenza al secondo piano. Pertanto potremo scrivere $R(t) = (5 + t, t - 2, -t)$. La verifica è immediata (sostituzione formale nelle equazioni dei piani).

$R(t) = (5 + t, t - 2, -t)\,.$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (t, 2\,t, -3\,t)$ e la retta R_2 di equazioni $x+y+z = 3$ e $2\,x - y = 1$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La direzione $R_1(t) = (1, 2, -3)$ della retta R_1 risulta ortogonale sia alla direzione $(1, 1, 1)$ normale al piano $x + y + z = 3$ che alla direzione $(2, -1, 0)$ normale al piano $2\,x - y = 1$. Quindi le rette R_1 ed R_2 sono parallele. Resta da valutare la distanza tra R_1 ed R_2. Si osservi che l'origine $O = (0, 0, 0)$ appartiene ad R_1 e conviene pertanto determinare la distanza di R_2 da O, ossia determinare quel punto H di R_2 tale che il vettore $\overrightarrow{OH}$ cada ortogonalmente su R_2. Per fare ciò conviene prima prodursi una rappresentazione parametrica di R_2, quale $R_2(t) = (t, 2\,t-1, 4-3\,t)$, e ricercare quindi per quale t si abbia $(t, 2\,t-1, 4-3\,t) \cdot (1, 2, -3) = 0$, ossia $t + 4\,t - 2 - 12 + 9\,t = 0$. Otteniamo $t = 1$ e quindi $H = R_2(1) = (1, 1, 1)$ e $|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{3}$.

$d(R_1, R_2) = \sqrt{3}\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono parallele. 2+1/30

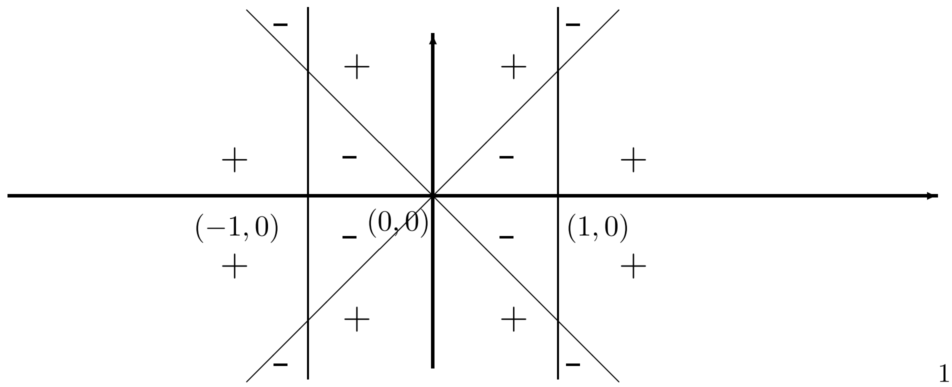
2. È data la funzione $F(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Occorre innanzitutto fattorizzare la F, il che viene semplice per raccoglimenti algebrici $F(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2 = x^2(x^2 - 1) - y^2(x^2 - 1) = (x^2 - y^2)(x^2 - 1) = (x - y)(x+y)(x-1)(y-1)$ ma poteva anche essere condotto, come primo passo, semplicemente risolvendo nella y (equazione di secondo grado) o nella y^2 (equazione di primo grado). Ultimando la fattorizzazione, scriveremo $F(x, y) = (x - y)(x + y)(x - 1)(x + 1)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x \vee \vee x = \pm 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 10 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". Non essendoci in questo caso radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x^3 - 2\,xy^2 - 2, x = 2\,x(2\,x^2 - y^2 - 1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -2\,x^2y + 2\,y = 2\,y(1 - x^2)$ e dobbiamo ricercare i punti

(x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(2\,x^2 - y^2 - 1) &= 0 \\ 2\,y(1 - x^2) &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione porta a considerare due casi:

$y = 0$ da cui seguirebbe $x = 0$ oppure $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 3 punti stazionari $(0,0)$ e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0,0)$ è punto di sella. Inoltre, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ devono essere punti di minimo locale per la F visto che la F, essendo continua, deve avere un massimo ed un minimo in ogni chiuso e compatto (si consideri il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ dove la F, sempre non negativa, si annulla sui bordi e quindi dovrà pur avere un massimo da qualche parte nel mezzo, e questo massimo dovrà essere rilevato come punto stazionario per la differenziabilità della F);

$x = \pm 1$ da cui seguirebbe $y = \pm 1$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 4 punti stazionari $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che questi 4 punti sono selle.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$, $(1,\pm 1)$, $(-1,\pm 1)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

I punti $(0,0)$, $(1,\pm 1)$, $(-1,\pm 1)$ sono selle della F.

I punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sono massimi locali della F.

6/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,1,0)$.

Poichè $F(1,1) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(1,1)\cdot(x-0) + F_y(1,1)\cdot(y-0) = 0$. In effetti il piano tangente doveva essere orrizzontale visto che $(1,1)$ era un punto stazionario della F.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1,1,0)$:

$z = 0$

1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $Q = \{(x,y)\ :\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Lo studio dei punti stazionari di cui sopra ha portato all'individuazione di 2 minimi (ed una sella) in seno a Q. Gli eventuali massimi sono quindi tutti situati sul bordo di Q. Inoltre, i 4 vertici del quadrato Q sono giá stati evidenziati essere punti di sella, mentre segue dallo studio del segno che tutti gli altri punti appartenenti agli spigoli verticali di Q, in quanto punti di annullamento della F, sono punti di massimo locale. Sugli spigoli orrizzontali, dove $y = \pm 1$, abbiamo $F = x^4 - 2\,x^2$ i cui massimi vengono rivelati dalla condizione di annullamento della derivata prima $F' = 4\,x^3 - 4\,x = 4\,x(x^2-1)$. L'unica soluzione di interesse è $x = 0$, che restituisce i massimi $(0, \pm 1)$ dove $F(0, \pm 1) = 1$.

2.d)

2 Max Assoluti: $(0, \pm 1)$

∞ Max Locali: $\{(x, y)\ :\ x = \pm 1, -1 < y < 1\}$

2 Min Assoluti: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

5 selle: $(0, 0)$, $(1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$

6/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E il triangolo del piano $y = 0$ di vertici $(R, 0)$, (R, R) e $(2\,R, 0)$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

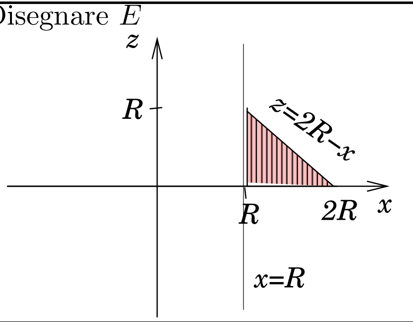
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z\ dx\, dy\, dz$;

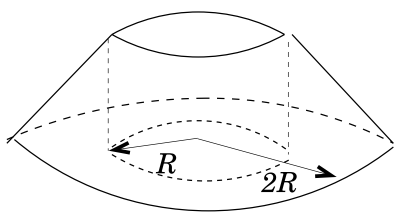
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è il triangolo di vertici $(R, 0)$, (R, R), e $(0, R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ R \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\,R - z\}\ \right\}$

cil: $Q = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ R \leq \rho \leq 2\,R - z\ \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$V \ = \ \int\!\!\int\!\!\int_Q \rho\ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho\ d\rho\, dz\, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R \int_R^{2R-z} \rho\, d\rho\, dz\right) = 2\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_R^{2R-z} dz \\
&= 2\pi \int_0^R 2R^2 - 2Rz + \frac{z^2}{2} - \frac{R^2}{2}\, dz = 2\pi \left[2R^2 z - R z^2 + \frac{z^3}{6} - \frac{R^2 z}{2}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 .
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2R-z} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$ 5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2R-z} z\,\rho\, d\rho\, dz\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R z \int_R^{2R-z} \rho\, d\rho\, dz\right) = 2\pi \int_0^R z \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_R^{2R-z} d\rho \\
&= 2\pi \int_0^R 2R^2 z - 2Rz^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{R^2 z}{2}\, dz = 2\pi \left[R^2 z^2 - \frac{2}{3} R z^3 + \frac{z^4}{8} - \frac{R^2 z^2}{4}\right]_0^R = \frac{5}{12}\pi R^4 .
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2R-z} z\,\rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{5}{12}\pi R^4$ 3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{5}{12}\pi R^4}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{5}{16} R .
$$

e) $x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{5}{16} R$ 2/30