**Prova scritta di Matematica II - 11 giugno 2008 - CORREZIONE Fila B**

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

**1.a.** Determinare le equazioni dei seguenti piani:

**1.a.a.** piano $\Pi_1$ passante per i punti $(\pi, \sqrt{11}, 1)$, $(\sqrt{11}, \pi, 2)$ e $(\pi + \sqrt{11}, 0, 3)$;

**1.a.b.** piano $\Pi_2$ contenente le rette $R_1(t) = (1 - t, 1 + t, \pi)$ e $R_2(s) = (1 + s, 1 + s, \pi)$;

**1.a.c.** piano $\Pi_3$ costituito dai punti equidistanti da $(-2, 2, 0)$ e $(2, -2, 0)$;

**1.a.d.** i piani $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $x + y = \pi + \sqrt{11}$, ed è quindi questa l'equazione del piano $\Pi_1$.

Tutti i punti di $R_1$ e tutti i punti di $R_2$ soddisfano alla condizione $z = \pi$, ed è quindi questa l'equazione del piano $\Pi_2$.

Il piano $\Pi_3$ passa per il punto medio del segmento congiungente $(-2, 2, 0)$ e $(2, -2, 0)$, ossia per l'origine, ed è ortogonale al vettore $(2, -2, 0) - (-2, 2, 0) = (4, -4, 0)$, ed ha quindi equazione $x - y = 0$.

La relazione geometrica tra i piani $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ è la relazione tra i vettori ad essi normali $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$. La mutuale ortogonalità di questi 3 vettori può essere verificata controllando la nullità di ciascuno dei 3 prodotti scalari.

| | |
|---|---|
| $\Pi_1$: $x + y = \pi + \sqrt{11}$<br>$\Pi_2$: $z = \pi$<br>$\Pi_3$: $x - y = 0$ | $\Pi_1$ (H) $\Pi_2$ (H) $\Pi_3$ (H) $\Pi_1$<br><br>1+1+1+2/30 |

**1.b.** Dati i 3 piani:

$$\Pi_1 : x + \alpha\, y + z = \beta + \sqrt{7} \qquad \Pi_2 : 2\,x + 3\,y + 2\,z = 0 \qquad \Pi_3 : \alpha\, x + y + \beta\, z = 2\,.$$

si determini per quali valori di $\alpha$ e $\beta$:

1.) l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ consiste di uno ed un solo punto;

2.) l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è vuota;

3.) l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_3$ è vuota.

Tre piani in posizione generica, ossia i cui vettori normali non siano contenuti tutti in uno stesso piano, si incontrano sempre in uno ed un sol punto. I vettori normali sono tutti contenuti in uno stesso piano se e solo se è nullo il volume del parallelepipedo che essi sottintendono, ossia ove si annulli il prodotto triplo:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 1 & \beta \end{matrix} \right\| = 3\beta + 2\alpha^2 + 2 - 3\alpha - 2 - 2\alpha\beta = (2\alpha - 3)(\alpha - \beta)\,.$$

Quindi l'intersezione non consta di un singolo punto solo quando $\alpha = \frac{3}{2}$ o quando $\alpha = \beta$.

Quando $\alpha = \frac{3}{2}$ i piani $\Pi_1$ e $\Pi_2$ sono paralleli, e quindi l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è vuota eccetto quando $\Pi_1 = \Pi_2$, ossia per $\beta = -\sqrt{7}$.

Il parallellismo tra $\Pi_1$ e $\Pi_3$ si ha per $\alpha = \beta = 1$ e per $\alpha = \beta = -1$, ed in entrambi i casi i piani sono poi distinti e quindi l'intersezione è vuota.

| |
|---|
| 1.) $\lvert\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3\rvert = 1$: ogniqualvolta $\alpha \neq \frac{3}{2}$ e $\alpha \neq \beta$ |
| 2.) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$: quando $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta \neq -\sqrt{7}$ |
| 3.) $\Pi_1 \cap \Pi_3 = \emptyset$: per $\alpha = \beta = 1$ e per $\alpha = \beta = -1$ |
| 2+1+1/30 |

**1.c.** Trovare un'equazione parametrica per la retta fatta di quei punti $P$ dello spazio che presentino la medesima distanza dai punti $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,2,0)$ e $P_3 = (0,0,3)$, ossia per la retta $R = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid d(P,P_1) = d(P,P_2) = d(P,P_3)\}$.

La direzione della retta sarà ortogonale sia al vettore $P_2 - P_1 = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$ che al vettore $P_3 - P_1 = (0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$ ed è quindi ottenibile con il computo del prodotto vettoriale $(-1,2,0) \wedge (-1,0,3) = (6,3,2)$. Resta da trovare un qualsiasi punto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ della retta, ossia un qualsiasi punto che presenti la medesima distanza dai punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$. Poichè la direzione $(6,3,2)$ coinvolge uno spostamento lungo le $x$, posso assumere $\overline{x} = 0$. Ottengo quindi il sistema

$$\begin{cases} (\overline{y}-2)^2 + \overline{z}^2 & = & d(\overline{P}, P_2) & = & d(\overline{P}, P_1) & = & 1^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2\,, \\ \overline{y}^2 + (\overline{z}-3)^2 & = & d(\overline{P}, P_3) & = & d(\overline{P}, P_1) & = & 1^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2\,. \end{cases}$$

da cui $\overline{y} = \frac{3}{4}$ e $\overline{z} = \frac{4}{3}$.

L'equazione parametrica è quindi $R(t) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + (6,3,2)\,t = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right) + (6,3,2)\,t$.

| |
|---|
| $R(t) = \left(6\,t, \frac{3}{4} + 3\,t, \frac{4}{3} + 2\,t\right)$ . |
| 3/30 |

**1.d.** Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (3,2,1+t)$ e la retta $R_2$ di equazioni $x+y+z = 1$ e $x - y = 0$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $y = t$ nelle equazioni di $R_2$ otteniamo una scrittura parametrica di tale retta: $R_2(t) = (t, t, 1 - 2\,t)$. Risulta ora evidente che la retta $R_2$ ha direzione $(1,1,-2)$ mentre la direzione della retta $R_1$ è espressa dal vettore $(0,0,1)$. Il più breve segmento che congiunge le due rette è ortogonale ad entrambe queste direzioni e la sua direzione è quindi ottenibile con il computo del prodotto vettoriale $(1,1,-2) \wedge (0,0,1) = (1,-1,0)$. Per valutare la distanza tra le due rette basta chiedersi quanto ci si sposti nella direzione del versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ nel passare da un qualsiasi punto di $R_1$ ad un qualsiasi punto di $R_2$. In particolare,

$$
\begin{aligned}
d(R_1,R_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}|(1,-1,0)\cdot(R_1(0)-R_2(0))| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|(1,-1,0)\cdot((3,2,1)-(0,0,1))| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|(1,-1,0)\cdot(3,2,0)| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Le due rette sono sghembe poichè non sono incidenti (dato che la loro distanza differisce da zero) ed hanno direzioni diverse.

| |
|---|
| $d(R_1,R_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .<br>Le rette $R_1$ ed $R_2$ sono sghembe. 2+1/30 |

**2.** È data la funzione $F(x,y) = y^2 - x^2 - 1 + 2\,x$ .

**2.a.** Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di $F$;

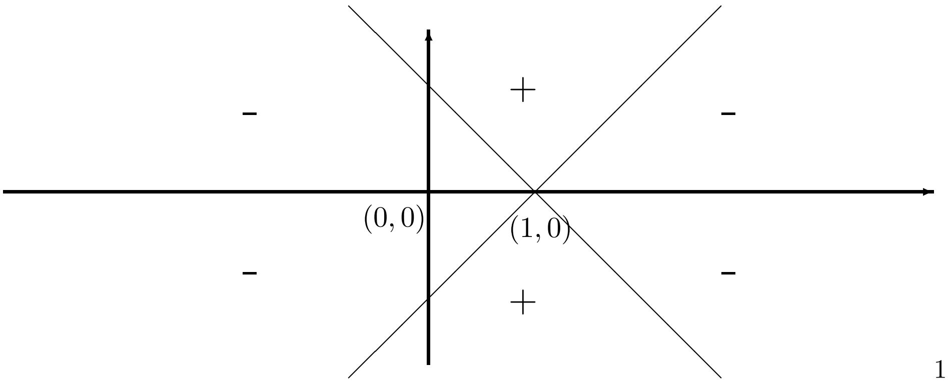
Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della $F$. Questa volta i prodotti notevoli offrono una rapida scorciatoia: $F(x,y) =$

$$
\begin{array}{rcl}
F(x,y) = & y^2 - x^2 - 1 + 2\,x & \text{come data} \\
= & y^2 - (x-1)^2 & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\
= & (y-(x-1))(y+(x-1)) & \text{prodotto notevole } a^2-b^2 \\
= & (y-x+1)(y+x-1)\,. & \text{già fattorizzata}
\end{array}
$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = (y-x+1)(y+x-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o $(y-x+1)$ o $(y+x-1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1-y \vee x = 1+y\ \}$. Poichè la $F$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 4 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la $F$ detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

**2.a)** Disegnare l'insieme $\Sigma_0$ e studio del segno:




1/30

**2.b.** Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione $F$;

Poichè la $F$ appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della $F$ significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = -2\,x + 2$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y$ e dobbiamo ricercare i punti $(x, y)$ che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,(1 - x) & = & 0 \\ 2\,y & = & 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. Chiaramente $(1, 0)$ è soluzione e quindi punto stazionario (come evidente anche dallo studio del segno). Inoltre, esso è il solo punto stazionario poichè è la sola soluzione del sistema. Si noti che $F(1, 0) = 0$. Dallo studio del segno della $F$ di cui al punto (a) é facile dedurre che $(1, 0)$ è punto di sella.

**2.b)** Elencare i punti stazionari di $F$ specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: solamente il punto $(1, 0)$.

Il punto $(1, 0)$ è punto di sella.

3/30

**2.c.** Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di $F$ nel punto $(0, 0, -1)$.

Poichè $F(0, 0) = -1$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della $F$. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = -1 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = -1 + 2\,x$.

**2.c)** Equazione del piano tangente $F$ in $(0, 0, -1)$:

$z = -1 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = -1 + 2\,x = 2\,x - 1$

2/30

**2.d.** Determinare tutti i punti estremali di $F$ nella regione $x^2 + y^2 - 2\,x + 1 \leq 9$.

La $F$, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè tutti i punti stazionari della $F$ sono risultati essere punti di sella, gli estremi di $F$ saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del cerchio

$(x-1)^2+y^2=9$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2\,(1-x) & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ 2\,y & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ (x-1)^2+y^2 & = g(x,y) = & 9\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo che $y=0$ (e quindi $x=1\pm 3$ dalla terza equazione) oppure che $\lambda=1$ (e quindi $x=1$ dalla prima equazione, da cui $y=\pm 3$ dalla terza). Queste sono le sole soluzioni del sistema di Lagrange, anche se per convincersene meglio resta sempre buona norma procedere con nozione di causa, prendendo in considerazione la forma della $F$, considerando le simmetrie in gioco, e prefigurandosi innanzittutto dove possano risiedere i punti estremali e quanti possano/debbano essere. Può sicuramente snellirci il lavoro avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. I punti trovati rispondono alle nostre aspettative. Infatti sia la $F$ che il dominio assegnato erano simmetrici per ribaltamento dell'asse delle $y$ ma anche per ribaltamento dell'asse delle $x$ sull'asse di simmetria $x=-1$. Infatti, $F(x,-y)=F(x,y)$ e $F(1-t,y)=F(1+t,y)$. Pertanto i punti estremali sono giustamente accoppiati:

$(1\pm 3,0)$ sono punti di minimo assoluto, ed in essi $F(1\pm 3,0)=-9$, mentre $(0,\pm 3)$ sono punti di massimo assoluto, ed in essi $F(0,\pm 3)=9$.

**2.d)**

2 Massimi Assoluti: $(0,\pm 3)$

dove $F=9$

2 Minimi Assoluti: $(1\pm 3,0)$

dove $F=-9$

5/30

**3.** In un riferimento Cartesiano $x,y,z$ sia $E$ la parte del piano $y=0$ descritta dalle disequazioni $0\leq z\leq x$ e $x^2+z^2\leq R^2$, e sia $Q$ il solido che si ottiene facendo ruotare $E$ di $360^o$ attorno all'asse delle $x$.

**3.a.** Disegnare sia $E$ (sulla sinistra) che $Q$ (sulla destra);

**3.b.** Esprimere $Q$ in coordinate cilindriche;

**3.c.** Esprimere $Q$ in coordinate Cartesiane e in coordinate sferiche;

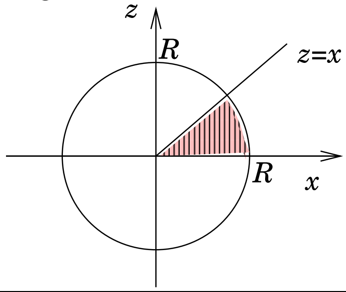
**3.d.** Calcolare il volume di $Q$ mediante integrazione;

**3.e.** Calcolare l'integrale triplo $I=\int_Q x\;dx\,dy\,dz$ ;

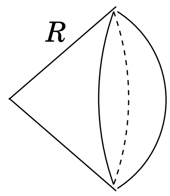
**3.f.** Fornire le coordinate del baricentro $B=(x_b,y_b,z_b)$ di $Q$;

La figura piana $E$ è l'intersezione tra il disco di raggio $R$ centrato nell'origine e la regione $0\leq z\leq x$.

**a.1)** Disegnare $E$




**a.2)** Disegnare $Q$




1+1/30

**b) esprimere $Q$ in coordinate cilindriche**

$$Q = \left\{ (\rho, \theta, x) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq \rho \leq x, \rho^2 + x^2 \leq R^2 \right\}$$

1/30

**c) esprimere $Q$ in coordinate Cartesiane e in coordinate sferiche**

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x \geq \sqrt{z^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$

Sfe: $Q = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq \rho \leq R,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume $V$ di $Q$ conviene riferirsi alle coordinate sferiche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^R \rho^2 \; d\rho \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \; d\phi \right) \\ &= 2\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \left[ -\cos\phi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi R^3 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \pi R^3 . \end{aligned}$$

**d)**

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \pi R^3$$

4/30

Il computo di $I$ è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$I = \int\int\int_Q \rho \cos\phi \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \frac{\sin 2\phi}{2} \; d\phi \, d\rho \, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{R} \rho^3 \, d\rho\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\,\phi}{2} \, d\phi\right) \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \left[-\frac{\cos 2\,\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\,\pi\,\frac{R^4}{4}\,(0-(-1)) = \frac{1}{8}\,\pi\,R^4\,.
\end{aligned}
$$

**e)**

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \tfrac{\sin 2\,\phi}{2} \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \tfrac{1}{8}\,\pi\,R^4$$

4/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $y_b = 0$, $z_b = 0$, e

$$x_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{8}\,\pi\,R^4}{\frac{2-\sqrt{2}}{3}\,\pi\,R^3} = \frac{3}{8(2-\sqrt{2})}\,R = \frac{3(2+\sqrt{2})}{8(4-2)} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{16}\,R\,.$$

**f)**

$x_b = \frac{I}{V} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{16}\,R$ $\qquad$ $y_b = 0$ $\qquad$ $z_b = 0$

2/30