Prova scritta di Matematica II - 18 aprile 2007 - CORREZIONE Fila D

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per $(1,-1,1)$ e ortogonale a $(3,2,0)$;

1.a.b. piano Π_2 passante per $(0,-3,3)$, $(12,0,0)$, $(3,-6,0)$;

1.a.c. piano Π_3 passante per $(3,1,1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t+1, 2\,t-2, 0)$.

1.a.d. quale relazione geometrica osserviamo tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3? Sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il piano Π_1 passante per $(1,-1,1)$ e ortogonale a $(3,2,0)$ avrà equazione $(x,y,z)\cdot(3,2,0) = (1,-1,1)\cdot(3,2,0)$ ossia $3\,x+2\,y=1$.

Assumiamo che il piano Π_2 sia descrivibile tramite un'equazione della forma $a\,x+b\,y+c\,z = 1$. La condizione del passaggio per $(12,0,0)$ impone $a = 1/12$, a questo punto la condizione del passaggio per $(3,-6,0)$ impone $b = -1/8$, ed infine la condizione del passaggio per $(0,-3,3)$ impone $c = 5/24$. Moltiplicando tutto per 8 otteniamo $2\,x-3\,y+5\,z = 24$. Tale equazione va poi verificata ricontrollandone il soddisfacimento sui tre punti.

Il piano Π_3 passante per $(3,1,1)$ e contente la retta di equazioni parametriche $P(t) = (3\,t+1, 2\,t-2, 0)$ contiene in particolare il punto $P(1) = (4,0,0)$ ed è ortogonale al vettore $(3,2,0)\wedge[(3,1,1)-(4,0,0)] = (3,2,0)\wedge(-1,1,1) = (2,-3,5)$ in quanto il vettore $(3,2,0)$ esprime la direzione della retta $P(t)$. Poichè $(2,-3,5)\cdot(4,0,0) = 8$, possiamo descrivere il piano Π_3 con l'equazione $2\,x-3\,y+5\,z = 8$.

I piani Π_2 e Π_3 sono paralleli in quanto entrambi ortogonali al vettore $(2,-3,5)$. Il piano Π_1 è ortogonale a questi in quanto il suo vettore di coefficienti direttori risulta ortogonale a questa direzione: $(3,2,0)\cdot(2,-3,5) = 6-6 = 0$.

Π_1: $3\,x+2\,y = 1$	Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $2\,x-3\,y+5\,z = 24$	
Π_3: $2\,x-3\,y+5\,z = 8$	1+1+1+2/30

1.b. Siano dati i tre vettori

$$u = (1,2,0) \qquad v = (\alpha-1, 2\,\alpha-2, 2-2\,\alpha) \qquad w = (2,0,1)\,.$$

1.b.a. Determinare i valori di α per cui:

1. u e v sono ortogonali; oppure v e w sono ortogonali;
2. u e v sono paralleli; oppure v e w sono paralleli.

1.) u e v sono ortogonali: $\alpha = 1$	v e w sono ortogonali: $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
2.) u e v sono paralleli: $\alpha = 1$	v e w sono paralleli: $\alpha = 1$
	1+1/30

1.b.b. Calcolare $u \cdot v \wedge w$ e dire per quali valori di α $u \cdot v \wedge w$ risulta negativo.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha - 1 & 2\,\alpha - 2 & 2 - 2\,\alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1\,(2\,\alpha - 2)\,1}_{2\,(\alpha - 1)} + \underbrace{2\,(2 - 2\,\alpha)\,2}_{+\,8(1-\alpha)} - \underbrace{2\,(\alpha - 1)\,1}_{2\,(\alpha-1)} = 8\,(1 - \alpha)$$

$u \cdot v \wedge w < 0$ per $\alpha > 1$ 1+1/30

In effetti $8\,(1 - \alpha)$ si annulla per $\alpha = 1$, dove due dei tre vettori sono paralleli. Questa verifica ci rassicura. Infatti, poichè $u \cdot v \wedge w$ varia con continuità al variare di α, allora $\alpha = 1$ è l'unico possibile valore di soglia in corrispondenza del quale $u \cdot v \wedge w$ può registrare una variazione di segno.

1.c. Calcolare la distanza tra le rette sghembe R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = 5$, $y = 1$, $z = 2\sqrt{3}\,t + 11\sqrt{\pi - 3}$ e $x = -7 - 561\sqrt{\pi + 2}\,s$, $y = 561\sqrt{\pi + 2}\,s$, $z = 1$.

Il più corto segmento che congiunge R_1 ed R_2 sarà ortogonale ad entrambe ossia parallelo al vettore $(0, 0, 1) \wedge (1, -1, 0) = (1, 1, 0)$, che è un vettore di lunghezza $\sqrt{2}$. Pertanto, dove $(5, 1, 0)$ è un qualsiasi punto della retta R_1 e $(-7, 0, 1)$ è un qualsiasi punto della retta R_2, allora la distanza tra R_1 ed R_2 è data da $\frac{1}{\sqrt{2}}|(1, 1, 0) \cdot (5, 1, 0) - (1, 1, 0) \cdot (-7, 0, 1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}|(1, 1, 0) \cdot (12, 1, -1)| = 13\frac{\sqrt{2}}{2}$.

In effetti la retta R_1 è contenuta nel piano $\Pi_1 :\ x + y = 6$ mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $\Pi_2 :\ x + y = -7$, dove la distanza tra Π_1 e Π_2 è appunto $13\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il fatto che le due rette siano sghembe implica a questo punto che la loro distanza sia pari alla distanza tra Π_1 e Π_2.

$d(R_1, R_2) = d(\Pi_1, \Pi_2) = 13\frac{\sqrt{2}}{2}$
dove i piani $\Pi_1 :\ x + y = 6$ e $\Pi_2 :\ x + y = -7$ contengono R_1 e R_2 risp. 4/30

1.d. Calcolare la distanza tra il punto $P = (2, 3, 4)$ ed il piano Π passante per l'origine ed ortogonale al vettore $(0, 1, 1)$.

Chiaramente, $||(0, 1, 1)|| = \sqrt{2}$. Pertanto la distanza ricercata vale $\frac{1}{\sqrt{2}}|(2, 3, 4) \cdot (0, 1, 1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}7$.

$$d(P, \Pi) = \frac{|(2,3,4)\cdot(0,1,1)|}{||(0,1,1)||} = 7\frac{\sqrt{2}}{2}$$

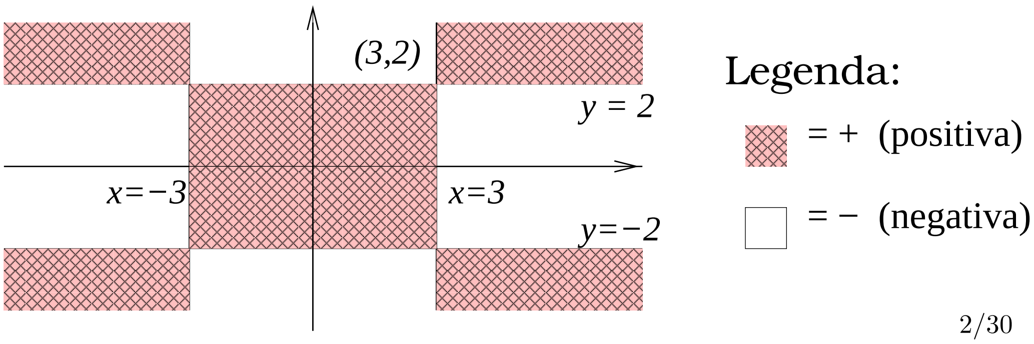
2/30

2. È data la funzione $F(x, y) = (x - 4)(xy^2 - 4\,x + 3\,y^2 - 12) - 12 + y^2(x + 3) - 4\,x$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di Σ_0. Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = (x - 4)(xy^2 - 4\,x + 3\,y^2 - 12) - 12 + y^2(x + 3) - 4\,x = (x^2 - 9)(y^2 - 4)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o (x^2-9) o (y^2-4). Spingendo un gradino oltre, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 3 \vee y = \pm 3\ \}$ ed il piano resta suddiviso nelle 9 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Di queste regioni, una sola è limitata (quella centrale).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = (x^2-9)(y^2-4)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,x(y^2-4)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y(x^2-9)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(y^2-4) &= 0 \\ 2\,y(x^2-9) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e ciascuno dei quattro punti $(\pm 3, \pm 2)$. Si noti che $F(\pm 3, \pm 2) = 0$, e che i punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono tutti e quattro punti di sella per quanto visto allo studio del segno. Il punto $(0,0)$ deve invece essere un punto di massimo in quanto esso cade nella regione limitata a compatta centrale la quale deve necessariamente avere punti di massimo (e di minimo, ma i minimi sono tutti e soli i punti della frontiera di detta regione). A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, ma avreste perso più tempo e rischiato possibili errori.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ più i 4 punti $(\pm 3, \pm 2)$.

I punti $(\pm 3, \pm 2)$ sono tutti e quattro punti di sella.

Il punto $(0,0)$ è punto di massimo. 4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,1,24)$;

In effetti il punto $(1,1,24)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,1) = 24$. Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali $F_x = 2\,x(y^2-4)$ e $F_y = 2\,y(x^2-9)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,1)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nell'intorno del punto $(1,1)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,1) = F_x(1,1)\,(x-1) + F_y(1,1)\,(y-1)$ ed otteniamo l'equazione $z - 24 = -6\,(x-1) - 16\,(y-1)$, che si semplifica in $6\,x + 16\,y + z = 46$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1,1,24)$ appartenga a tale piano.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1,1,24)$:

$6\,x + 16\,y + z = 46$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto di minimo, i minimi della F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto investighiamo eventuali estremi sulla frontiera impiegando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + y^2$ e $g_x = 2\,x$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,x(y^2-4) & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ 2\,y(x^2-9) & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 & = g(x,y) = & 25\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo allora assumere $\lambda \neq 0$. Per incominciare, si assuma $x, y \neq 0$. In questo caso si hanno delle ovvie semplificazioni e $(x^2 - 9) = (y^2 - 4)$ segue combinando le prime due equazioni semplificate. Combinando ora con la terza equazione otteniamo $(x^2 - 9) = (y^2 - 4) = 25 - x^2 - 4$ da cui $2\,x^2 = 30$. Quindi $x = \pm\sqrt{15}$ e $y = \pm\sqrt{25 - 15} = \pm\sqrt{10}$. Tutte e quattro le possibilità sono di interesse e ciò suggerisce (nel volerle catalogare) di guardare alla simmetrie della F, che in effetti è pari sia rispetto alla x (ossia $F(-x,y) = F(x,y)$) che rispetto alla y (ossia $F(x,-y) = F(x,y)$). Ora, $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = 36$, e quindi questi quattro punti, così come anche l'origine stessa, sono punti di massimo assoluto sulla regione R in quanto, per magica coincidenza, $F(0,0) = 36 = F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$. Ma non abbiamo ancora scovato i minimi. Evidentemente dobbiamo andare a cercare fuori dall'assunzione $x, y \neq 0$ sopra presa per comodità. Ora, se $x = 0$, allora $y = \pm 5$ segue dalla terza equazione. Analogamente, se $y = 0$ allora $x = \pm 5$. Questa volta $F(\pm 5, 0) = -4 \cdot 16 = -64$ e $F(0, \pm 5) = -9 \cdot 21 = -189 < 64$, quindi $(0, \pm 5)$ è minimo assoluto mentre $(\pm 5, 0)$ è minimo relativo su R.

2.d)

2 Min Assoluti: $(0, \pm 5)$, ; $F(0, \pm 5) = -189$

2 Min Relativi: $(\pm 5, 0)$, ; $F(\pm 5, 0) = -64$

5 Max Assoluti: $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$; $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = F(0,0) = 36$

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \sqrt{49\,(x^2-9)(y^2-4)}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x^2-9)(y^2-4) \geq 0 \ \right\}$$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x,y) = \sqrt{49\,(x^2-9)(y^2-4)}$ nella regione $R \cap D[h]$.

Osservato che $h(x,y) = \sqrt{49\,F(x,y)}$, e considerato che la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

Infiniti Minimi Assoluti dove $h(x,y) = 0$: ogni punto in $\Sigma_0 \cap R$

5 Max Ass: $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10})$; $F(\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{10}) = F(0,0) = \sqrt{49 \cdot 36} = 42$

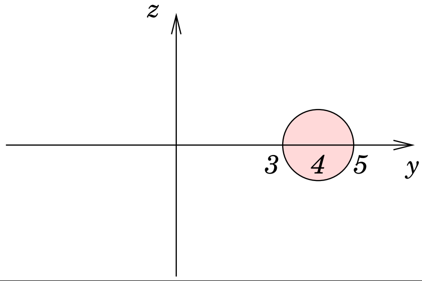
2/30

3. Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 8\,y + 15 \leq 0\}$. Sia M_E il solido che si ottiene facendo ruotare E attorno all'asse delle z. Sia R l'intersezione tra M_E ed il piano $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

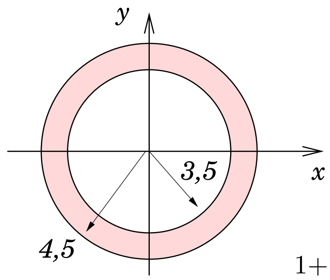
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che R (sulla destra);
3.b. Esprimere M_E ed R in coordinate cilindriche;
3.c. Esprimere R in coordinate Cartesiane;
3.d. Calcolare il volume di M_E mediante integrazione;
3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_{M_E} z + x + xy \; dx\,dy\,dz$;
3.f. Calcolare la superfice S di R.

Quando intersechiamo la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8\,y + 15 \leq 0$ con il piano $x = 0$ otteniamo un disco $y^2 + z^2 - 8\,y + 15 \leq 0$. Esso trova una più trasparente scrittura come $(y-4)^2 + z^2 \leq 1$. Questa riscrittura indica chiaramente il raggio e le coordinate del centro, ed è stata ottenuta con la tecnica del completamento al quadrato. Questo disco ormai completamente compreso è E, ed è illustrato in figura. Se noi ruotiamo la superfice E attorno all'asse delle z otteniamo una ciambella come solido di rotazione. Nel gergo matematico questa ciambella è chiamata *toro*. I punti più alti della ciambella hanno quota $z = 1$ e sono disposti lungo una circonferenza di raggio 2. Quando si interseca la ciambella con il piano $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ottiene un disco bucato (R, il buco con la menta intorno). Una fotografia (scattata da Hubble) di questo anello di Saturno R è riportata nella figura, sulla destra. Il bordo esterno dell'anello ha raggio $4,5$ mentre il bordo del buco interno ad esso ha raggio $3,5$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare R



1+1/30

b) coordinate cilindriche

$$M_E = \left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \leq 1-(\rho-4)^2 \right\}$$

$$R = \left\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ \tfrac{7}{2} \leq \rho \leq \tfrac{9}{2}, z = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

1+1/30

c) coordinate Cartesiane

$$R = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z=1,\ \tfrac{49}{4} \leq x^2+y^2 \leq \tfrac{81}{4} \right\}$$

1/30

Vista la simmetria cilindrica di M_E, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate polari ed osservare che precisamente metà del volume di M_E galleggia al di sopra del piano $z=0$. Così il computo del volume V di M può essere condotto come segue.

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 \sqrt{1-(\rho-4)^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,(t+4)\ dt \\
&= 4\,\pi\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,t\ dt + 4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ \ dt\right) \\
&= 4\,\pi\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ dt^2 + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cos\alpha\ \ d\alpha\right) \\
&= 4\,\pi\left(\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\alpha}\cos\alpha\ \ d\alpha\right) \\
&= 4\,\pi\left(\frac{1}{3}\left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{-1} + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\ \ d\alpha\right) \\
&= 4\,\pi\left(0 + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}+\cos 2\,\alpha\ \ d\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad 16\,\pi\,\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\,\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\,\pi\,\left[\alpha+\sin 2\,\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\,\pi\,(\pi+0) = 8\,\pi^2\,.$$

d)

$V = 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 \sqrt{1-(\rho-4)^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 8\,\pi^2$

4/30

Per il computo di I conviene scomporre $I = \int_{M_E} z + x + xy\ dV$ come $\int_{M_E} z\ dV + \int_{M_E} x + xy\ dV$ ed osservare che il solido M_E gode delle seguenti simmetrie:

1. $(x,y,z) \in M_E$ se e solo se $(x,y,-z) \in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} z\ dV = 0$.
2. $(x,y,z) \in M_E$ se e solo se $(-x,y,z) \in M_E$, da cui segue $\int_{M_E} x + xy\ dV = 0$.

e)

$I = \int_{M_E} z\ dV + \int_{M_E} x + xy\ dV = 0 + 0 = 0$

3/30

Per il computo della superfice S di R conviene ottenerla come differenza tra le superfici dei cerchi di raggio $\frac{9}{2}$ e $\frac{7}{2}$, ossia $S = \pi\left(\frac{9^2-7^2}{2^2}\right) = 8\,\pi$.

f)

$S = \pi\left(\frac{9^2-7^2}{2^2}\right) = 8\,\pi$

2/30