Prova scritta di Matematica II - 28 settembre 2006 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. In un riferimento Cartesiano x, y, z sono dati i tre punti e vettori

$$P = u = (3, 4, 0) \qquad Q = v = (0, 3, 4) \qquad T = w = (4, 0, 3)\,.$$

1.a. Calcolare $u \cdot v \wedge w$.

$$u \cdot v \wedge w = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{27} + \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{+64} + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}_{0} - 0 - 0 - 0 = 91$$

1/30

1.b. Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e T.

L'area del triangolo é metá dell'area del parallelogramma di lati $\vec{PQ} = (0, 3, 4) - (3, 4, 0) = (-3, -1, 4)$ e $\vec{PT} = (4, 0, 3) - (3, 4, 0) = (1, -4, 3)$, ossia metá della lunghezza del vettore $\vec{PQ} \wedge \vec{PT} = (-3, -1, 4) \wedge (1, -4, 3) = (13, 13, 13)$. In effetti $(13, 13, 13)$ è ortogonale sia a $(-3, -1, 4)$ che a $(1, -1, 0)$. Inoltre la direzione di $(13, 13, 13)$ convince anche per la simmetria dei punti P, Q e T. Pertanto, $Area(PQT) = \frac{1}{2}||(13, 13, 13)|| = \frac{13}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{13}{2}\sqrt{3}$.

$$\text{Area}(PQT) = \tfrac{1}{2}||\vec{PQ} \wedge \vec{PT}|| = \tfrac{1}{2}||(13, 13, 13)|| = \tfrac{13}{2}\sqrt{3}$$

2/30

1.c. Determinare la distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q e la distanza di P dalla retta r_{QT} passante per Q e T.

La distanza di T dalla retta r_{PQ} passante per P e Q corrisponde all'altezza del triangolo PQT rispetto alla base $\overline{PQ}$. Conviene avvalersi di quanto calcolato al punto precedente. Per quanto riguarda la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$, avremo $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{26}$. Inoltre, la simmetria dei punti P, Q e T ci suggerisce che la distanza di P dalla retta r_{QT} coincida con la distanza di T dalla retta r_{PQ}, il che può essere utilizzato come verifica.

$$d(T, r_{PQ}) = \frac{2 \cdot \text{Area}(PQT)}{|\overline{PQ}|} = \frac{\sqrt{78}}{2} \qquad d(P, r_{QT}) = d(T, r_{PQ}) = \frac{\sqrt{78}}{2} \text{ per simmetria}$$

3/30

1.d. Determinare le seguenti equazioni:

1.d.a equazioni del piano Π passante per P, Q, e T;

1.d.b equazioni parametriche della retta r passante per P e parallela al segmento $\overline{QT}$;

1.d.c equazioni simmetriche della retta r.

Sappiamo che il vettore $(13, 13, 13)$ è normale al piano Π. Ne consegue che una possibile equazione per Π ha la forma $13x + 13y + 13z = \alpha$. Il valore di α può essere computato tramite la condizione di passaggio per P, ossia $13(3 + 4 + 0) = \alpha$, che restituisce $\alpha = 91$. Si noti che le condizioni di passaggio per Q o T avrebbero condotto allo stesso valore per α, il che vale come verifica.

Il vettore $\vec{QT} = (4, 0, 3) - (0, 3, 4) = (4, -3, -1)$ esprime la direzione del segmento $\overline{QT}$.

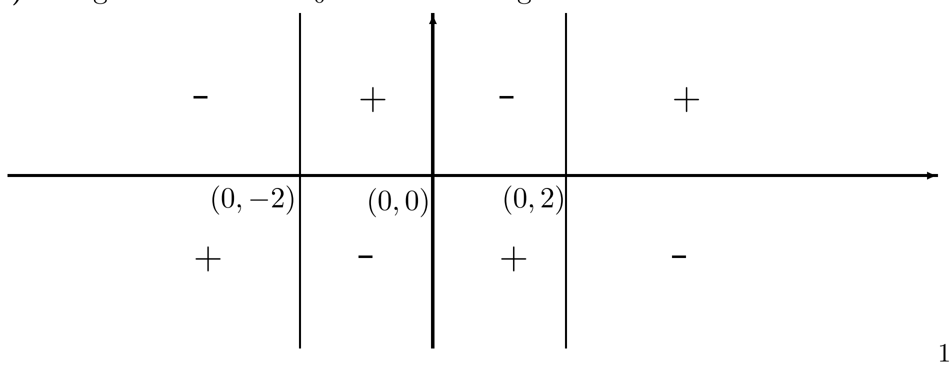
Π: $13\,x + 13\,y + 13\,z - 91 \ = 0$	$r : \begin{cases} x = & 4\,t & +3 \\ y = & -3\,t & +4 \\ z = & -t & \end{cases}$	$r : z = \frac{y-4}{3} = \frac{3-x}{4}$ 2+2+2/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 2\,x^3\,y - 8\,xy$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

La funzione $F(x, y) = 2\,x^3\,y - 8\,xy = 2\,xy(x-2)(x+2)$ é data come prodotto di 4 monomi: x, $(x - 2)$, $(x + 2)$ e y. Per la legge di annullamento del prodotto, l'insieme di livello $\Sigma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\ \}$ é catturato nella scrittura $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0) \vee (x = 2) \vee (x = -2) \vee (y = 0)\ \}$. Può risultare utile, per una prima conoscenza della F, tracciarsi le rette in Σ_0 nel piano $x - y$ preso a dominio della F. Tali rette suddividono il piano in 8 regioni, ciascuna labellabile col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si disporranno a scacchiera.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 6\,x^2\,y - 8\,y = 2\,y(3x^2 - 4)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,x^3 - 8\,x = 2\,x(x^2 - 4)$ ed i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,y(3x^2 - 4) & = & 0 \\ 2\,x(x^2 - 4) & = & 0 \end{cases}$$

ottenuto imponendo la condizione di annullamento del gradiente, debbono tutti avere $x \in \{0, -2, 2\}$ per soddisfare alla seconda equazione. Pertanto, l'unico modo per soddisfare anche alla prima equazione é di avere $y = 0$. Abbiamo pertanto 3 soli punti stazionari: il punto $(0, 0)$, il punto $(2, 0)$, ed il punto $(-2, 0)$. Si noti che $F(0, 0) = 0 = F(\pm 2, 0)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che tutti e tre i punti stazionari individuati sono di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$, $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

I punti $(0, 0)$ e $(\pm 2, 0)$ sono tutti punti di sella.

4/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1, 2, -12)$.

In effetti il punto $(1, 2, -12)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1, 2) = -12$. Possiamo quindi procedere. Poiché le derivate parziali $F_x = 2\,y(3x^2 - 4)$ e $F_y = 2\,x(x^2 - 4)$ esistono e sono continue in un intorno di $(1, 2)$, la F é differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto puó essere considerato come l'approssimazione lineare della F nel punto $(1, 2, -12)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1, 2) = F_x(1, 2)\,(x - 1) + F_y(1, 2)\,(y - 2)$ ed otteniamo l'equazione $z + 12 = -4\,(x - 1) - 6\,(y - 2)$, che si semplifica in $4\,x + 6\,y + z = 4$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1, 2, -12)$ appartenga a tale piano.

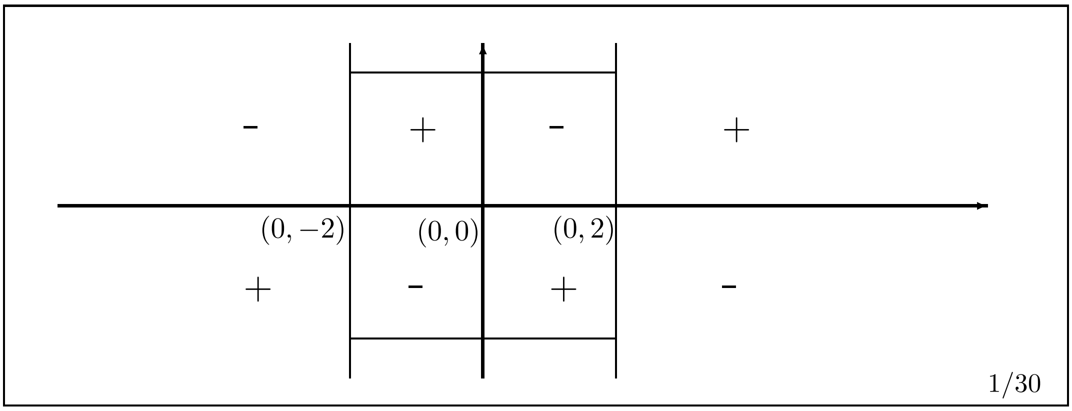
2.c) Equazione del piano tangente F in $(1, 2, -12)$:

$$4\,x + 6\,y + z = 4$$

3/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nel quadrato Q di spigoli $(-2, -2)$ e $(2, 2)$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del quadrato Q. Poichè il bordo del quadrato Q si compone di 4 segmenti, possiamo ridurre il problema a 4 problemi di ricerca di estremi in una sola dimensione. Tuttavia, al solito, conviene procedere con cautela e metodo, prefigurandosi innanzittutto dove possano risiedere questi punti estremali e quanti possano/debbano essere. Può sicuramente snellirci il lavoro avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x, -y) = F(x, y)$, ma anche $F(-x, y) = -F(x, y)$. Queste 2 simmetrie implicano ovviamente anche l'anti-simmetria centrale $F(x, y) = -F(-x, -y)$ Pertanto i punti estremali, eccetto quelli ad ascissa od ordinata nulla, vengono in gruppi di 4 immagini caledoiscopiche. Nel caso di ascissa od ordinata nulla (non posso avere sia $x = 0$ che $y = 0$ visto che sono sul bordo di Q) allora le immagini caleidoscopiche sono precisamente 2 poichè solo il ribaltamento sulla coordinata non nulla mi differenzia effettivamente. In ogni caso, è ormai chiaro che basterà studiare i soli punti del primo quadrante e ricordarsi di tradurre ciascuno di essi nei suoi 4 (o 2) alter-egos caleidoscopici. Detto questo, quante radici dobbiamo aspettarci e dove potrebbero essere grosso modo posizionate? Per rispondere a queste domande, visualizziamo il contorno di Q nel piano dove abbiamo condotto lo studio del segno.



Possiamo ora osservare le seguenti cose:

- (1) $F = 0$ su tutti i punti situati sui 2 bordi verticali del quadrato. Questa osservazione implica che basterà studiare i bordi orizzontali. Di fatto, vista la simmetria $F(x, -y) = F(x, -y)$, basterà studiare gli estremi della F sul bordo superiore di Q. Poichè il bordo superiore di Q è costituito dai punti $(x, 2)$ con $-2 \leq x \leq 2$, ci siamo ridotti al problema di trovare gli estremi della funzione $f(x) := F(x, 2) = 4\,x^3 - 16\,x = 4\,x(x-2)(x+2)$ per $-2 \leq x \leq 2$.
- (2) il quadrato Q si compone di 4 regioni chiuse incollate tra loro. Queste regioni sono dei quadratini, ciascuno con precisamente 3 dei suoi bordi contenuto entro Σ. Su ciascun quadratino la F assume solo valori non negativi, se il quadratino è contrassegnato con un "-", o non positivi, se il quadratino è contrassegnato con un "+". Su ciascuno di tali quadratini la F dovrà avere sia punti di massimo che di minimo e questi punti dovranno essere situati tutti sul contorno della regione.

Concentriamoci sul quadratino $Q_{1,1}$ posto nel primo quadrante. Esso è contrassegnato con un "-". Si noti che i punti dei bordi inferiore, sinistro, e destro, sono tutti punti di massimo assoluto della F su $Q_{1,1}$ dacchè su $Q_{1,1}$ la F assume solo valori non-positivi. Si noti che i punti dei bordi inferiore e sinistro di $Q_{1,1}$ sono però dei punti di sella della F su tutto Q, dacchè l'attraversamento di tali bordi ci mantiene entro Q invertendo nel contempo il segno della F. Invece tutti i punti del bordo destro di $Q_{1,1}$, eccetto il punto $(2, 0)$, sono punti di massimo (anche se solo relativo, ossia solo in senso locale) della F su Q dacchè l'attraversamento di tale bordo ci porterebbe fuori da Q, a meno che non si sia in $(2, 0)$ e ci si diriga verso il basso. Ora, dacchè la F su $Q_{1,1}$ assume anche valori non nulli, resta da localizzare almeno un punto di minimo, necessariamente localizzato internamente al bordo superiore di $Q_{1,1}$. Ricercare il minimo della funzione $f(x) := F(x, 2) = 4\,x^3 - 16\,x$ introdotta sopra equivale a stanare tale minimo. La $f(x)$ è di terzo grado e pertanto darà luogo a precisamente un minimo relativo e precisamente un massimo relativo. Noi ci interessa il minimo relativo (il massimo relativo corrisponderà all'alter-ego caleidoscopico disposto nel secondo quadrante). Per reperirlo computiamo la derivata $f_x = 12\,x^2 - 16 = 4(3\,x^2 - 4)$. Le radici della f_x sono $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$, ed a noi interessa quella positiva, dove in effetti vale $0 < \frac{2}{3}\sqrt{3} < 2$. Siamo fortunati: su $Q_{1,1}$ abbiamo esattamente un punto di minimo, pertanto esso è sicuramente un punto di minimo assoluto senza bisogno di altri accertamenti. Il minimo valore di F su Q è $F\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\right) = -\frac{64}{9}\sqrt{3}$.

2.d)

2 Minimi Assoluti: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2\right)$; $F = -\frac{64}{9}\sqrt{3}$

2 Massimi Assoluti: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2\right)$; $F = \frac{64}{9}\sqrt{3}$

Massimi Relativi: $\{(2, y), (-2, -y) \ : \ y \in (0, 2]\}$; $F = 0$

Minimi Relativi: $\{(2, -y), (-2, y) \ : \ y \in (0, 2]\}$; $F = 0$ 5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $|z| \leq |x| \leq R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M in coordinate Cartesiane;

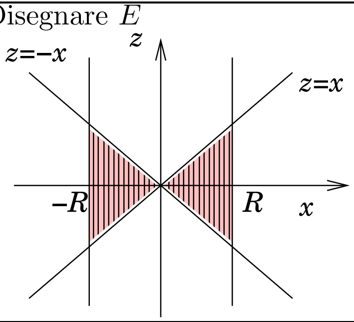
3.c. Calcolare il volume di M mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_M z \ dx\,dy\,dz$;

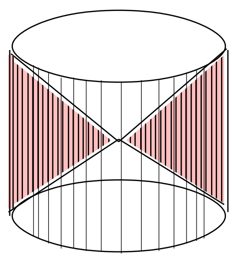
3.e. Calcolare la superficie di M.

La figura piana E è l'intersezione della striscia verticale centrata sull'asse delle z e di ampiezza $2R$, come determinata dalla condizione $|x| \leq R$, con l'insieme di punti che soddisfano alla diseguaglianza $|z| \leq |x|$. Per interpretare il luogo del piano $x - z$ descritto da $|z| \leq |x|$ basta delimitarne i contorni, ossia comprendere l'eguaglianza $|z| = |x|$. I punti che soddisfano tale eguaglianza sono i punti $z = \pm x$. Rimandiamo alla correzione del tema del 31 agosto 2006 se questo punto solleva vostre perplessità.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare M



1/30

b)

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq R^2, \ |z| \leq |x| \ \right\}$$

2/30

Vista la simmetria cilindrica di M, reputiamo conveniente riferirci alle coordinate cilindriche per il computo del volume V di M.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_M 1 \, dx\, dy\, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \int_0^R \rho \left(\int_{-\rho}^{\rho} 1 \, dz\right)\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^R (\rho\, [z]_{-\rho}^{\rho})\, d\rho = 2\pi \int_0^R 2\,\rho^2 \, d\rho \\
&= 4\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\,\pi\, R^3 \,.
\end{aligned}
$$

In effetti se ad un cilindro di raggio R ed altezza R (di volume $\pi\, R^3$) tolgo una piramide di raggio R ed altezza R (di volume $\frac{1}{3}\pi\, R^3$), ottengo la metà del solido M che giace sopra il piano $z = 0$ (oppure la metà che giace sotto). Quindi i conti tornano.

c)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\rho}^{\rho} \rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \left(\int_0^R 2\,\rho^2 \; d\rho\right) = \tfrac{4}{3}\,\pi\, R^3$$

5/30

Per quanto riguarda I, si osservi che la funzione integranda $f(\theta, \rho, z) = z$ gode della anti-simmetria $f(\theta, \rho, -z) = -f(\theta, \rho, z)$ e la regione di integrazione (tutto il solido M) è simmetrica rispetto al ribaltamento dell'asse delle z. Pertanto il contributo (positivo) al di sopra del piano $z = 0$ si elide perfettamente con il contributo (negativo) al di sotto dello stesso piano, ed $I = 0$.

Questa verità sarebbe comunque venuta velocemente alla luce anche per chi avesse impostato toucour l'integrale, presumibilmente come segue.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_M z \; dx\, dy\, dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right) \int_0^R \rho \left(\int_{-\rho}^{\rho} z \; dz\right)\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^R (\rho \left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\rho}^{\rho})\, d\rho = 0\,.
\end{aligned}
$$

d)

$I = 0$ poichè M è simmetrico su ribaltamento dell'asse z

3/30

Come per il volume, la superfice di M andava vista come il doppio della superfice della parte di M posta sopra il piano $z = 0$ (e non a contatto con il piano $z = 0$) e quindi scomposta nella superfice laterale del cilindro di raggio ed altezza R (con estensione $2\pi R^2$) e nella superfice laterale del cono di raggio ed altezza R (con estensione $\sqrt{2}\pi R^2$). La superfice laterale del cono poteva essere facilmente calcolata tramite formule ripescate da riminescenze della scuola primaria, o dal Bignami, ma anche da una qualsiasi enciclopedia, o infine da internet (questa ultima possibilità vi è però preclusa durante il compito poichè non è consentito l'utilizzo di alcun dispositivo dalle calcolatrici e dai telefonini in su). Come sempre, ricercare la comprensione delle cose oggi evita di dover ricorrere ad un sussidio domani: la superfice di un cono non cambia se lo taglio lungo un qualsiasi segmento che vada dal vertice del cono ad un punto della circonferenza su cui il cono poggia, e se poi lo spiano ottenendo un settore di circonferenza. La lunghezza del segmento su cui ho tagliato è chiamata altezza obliqua del cono, e nel nostro caso vale $\sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$ ma è comunque sempre ottenibile tramite il teorema di Pitagora. L'area di un settore di circonferenza di raggio ρ e lungo ℓ vale $\frac{\rho\ell}{2}$, formula questa che generalizza la formula per l'area di un cerchio ma che è anche da essa immediatamente deducibile (basta convincersi della dipendenza lineare in ℓ. Pertanto, possiamo considerare la formula che esprime l'area del cerchio come un esempio base di quello che potremmo chiamare "self-refining mathematical statement" o "enunciati matematici automigliorativi"). In conclusione, la superfice del nostro cono varrà $\frac{(\sqrt{2}R)(2\pi R)}{2} = \sqrt{2}\pi R^2$. Quindi $S = 2(2\pi R^2 + \sqrt{2}\pi R^2) = 2(2 + \sqrt{2})\pi R^2$.

e)

$$S = 2(2\pi R^2 + \sqrt{2}\pi R^2) = 2(2 + \sqrt{2})\pi R^2$$

4/30