Prova scritta di Matematica 28 settembre 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (3pt) Dimostrare per induzione che

$2^n > n^2$ per ogni $n \geq 5$.

dimostrazione

BASE: vero per $n = 5$ in quanto $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

PASSO: verifico la diseguaglianza per $n+1$ assumendola per n:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 > n^2 + 2\,n + 1 = (n+1)^2.$$

3/30

2. (12pt) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere (+ fornendo dimostrazioni) e quali sono false (+ fornendo controesempi).

(1+2pt) composizione di funzioni strettamente crescenti è strettamente crescente;
(1+2pt) ogni funzione continua e suriettiva è anche invertibile;
(1+2pt) ogni funzione strettamente crescente e suriettiva è anche invertibile;
(1+2pt) ogni funzione strettamente crescente e suriettiva è anche continua.

3. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}} - (1-x^2)^{\frac{3}{4}}} =$

Sostituendo 0 ad x otteniamo $\frac{1-1}{0-0} = \frac{0}{0}$ per una forma indeterminata.

Per semplificare, converrá riferirsi agli sviluppi di Taylor:

$$(1 \pm x^2)^{\frac{3}{4}} = 1 \pm \tfrac{3}{4}x^2 + o(x^2),\ \cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2),\ e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

pervenendo a $\lim_{x \mapsto 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 - x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{3}{4}x^2 - 1 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = -1.$

5/30

Si sarebbe potuto risolvere anche con due applicazioni consecutive dell'Hopital, ma l'impiego degli sviluppi di Taylor a fine semplificatorio ci consegna quí chiaramente una maggior rapiditá di lettura della situazione.

4. (7pt) Si calcoli $\int \frac{x^2+2}{x^5+2\,x^3+x}$.

Vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte, che come primo passo rende il grado del numeratore non eccedente a quello del denominatore (tramite divisione polinomiale) e come secondo (ed unico per il quale il metodo non sia effettivo) passo cerca di fattorizzare il denominatore come polinomi di grado al piú due (cosa sempre fattibile in linea di principio per il teorema fondamentale dell'algebra). Siccome il grado del numeratore é giá basso, siamo proprio a questo secondo passo non scontato ed inquietante, e speriamo che me la cavo ...

Siamo fortunati, il polinomio a denominatore é si di quinto grado (e quindi giá non esiste un metodo per determinarne le radici) non ha termine noto nullo, ossia x=0 ne é una radice e possiamo quindi raccogliere la x come prima fattorizzazione rimanendo con un polinomio di quarto grado che ha quel punto é sicuramente gestibile. In questo caso, dopo aver raccolto la x, mi restano solo le potenze pari, e quindi posso vederlo come un polinomio di grado dimezzato $\frac{4}{2} = 2$ che puó essere sempre risolto con la formula del delta. Ma la fattorizzazione risulta evidente di suo se ci si é creati quell'attimo di dimestichezza consigliabile coi prodotti notevoli.

$$x^5 + 4\,x^3 + x = x\,(x^4 + 2\,x^2 + 1) = x\,(x^2 + 1)^2\,.$$

A questo punto il teorema di Hermite garantisce che esistano dei valori A, B, C, D ed E tali che

$$\frac{x^2 + 2}{x\,(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{x^2 + 1} + \frac{D\,x + E}{(x^2 + 1)^2}\,,$$

ed il prossimo passo consiste nel determinare questi valori. La macchina per compierlo consiste nella soluzione del sistema che scaturisce dall'uguaglianza desiderata, ossia dall'identitá polinomiale:

$$x^2 + 2 = A\,(x^2 + 1)^2 + (B\,x + C)\,x\,(x^2 + 1) + (D\,x + E)\,x\,.$$

Otteniamo $A = 2$, $B = -2$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$, ossia

$$\frac{x^2 + 2}{x\,(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2\,x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,,$$

e quindi

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^5 + 2\,x^3 + x} = \int \frac{x^2 + 2}{x\,(x^2 + 1)^2} = \int \frac{2}{x} - \int \frac{2\,x}{x^2 + 1} - \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,,$$

dove si apprezzi come ha lavorato bene la linearitá dell'integrale nello sminuzzare un problema in problemi piú piccoli.

Ora, $\int \frac{2}{x} = 2\,\log|x|$, mentre $\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,d\,x = \int \frac{1}{x^2+1}\,d\,(x^2+1) = \log|x^2+1|$, e $\int \frac{2\,x}{(x^2+1)^2}\,d\,x = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,d\,(x^2+1) = -\frac{1}{x^2+1}$.

$\int \frac{x^2+2}{x^5+2\,x^3+x} =$

Fattorizzazione del denominatore e scomposizione di Hermite:

$\int \frac{x^2+2}{x^5+2\,x^3+x} = \int \frac{x^2+2}{x\,(x^2+1)^2} = \int \frac{2}{x} - \int \frac{2\,x}{x^2+1} - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

La linearitá dell'integrale ha spezzato il problema in 3, di cui 1 immediato:

$\int \frac{2}{x} = 2\,\log|x|$

E gli altri 2 facilmente maneggiabili:

$\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,d\,x = \int \frac{1}{x^2+1}\,d\,(x^2+1) = \log|x^2+1|$

$\frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{(x^2+1)^2}\,d\,x = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,d\,(x^2+1) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$

Quindi $\int \frac{x^2+2}{x^5+2\,x^3+x} = 2\,\log|x| - \log|x^2+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$.

7/30

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(3,2,0)$, $(3,2,1)$ e $(6,4,1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (t, 1, -3\,t)$ e la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 7$ nel punto $(1,1,1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $2\,x - 3\,y = 0$ che é quindi equazione che caratterizza il piano Π_1.

Se il piano Π_2 contiene la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $3\,x + 2\,y = 1$ e $z = 1$, ossia $3\,\alpha x + 2\,\alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $3\,x + 2\,y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (t, 1, -3\,t)$, che comporta $3\,t + 2 - 3\,\beta t = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $3\,x + 2\,y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x, y) = 3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 7$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1,1,1)$, ch e possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(6,4,2)$, che preferiamo rimpiazzare con $(3,2,1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(3,2,1)$ e passante per $(1,1,1)$. Il generico punto (x,y,z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(3,2,1)$ eguaglia quello di $(1,1,1)$, che é 6.

Π_1: $2\,x - 3\,y = 0$

Π_2: $3\,x + 2\,y + z = 2$

Π_3: $3\,x + 2\,y + z = 6$

Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per $(1,1,1)$ ed incidente ortogonalmente nella retta $R'(t) = (0, 1+t, 1+2\,t)$.

La retta R sarà contenuta nel piano ortogonale a $(0,1,2)$ e passante per $(1,1,1)$, ossia nel piano $y + 2\,z = 3$ e passerà, oltre che per $(1,1,1)$, anche per il punto di R' contenuto in tale piano, dato da $(1+t) + 2\,(1+2\,t) = 3$, quindi da $t = 0$, e quindi $(0,1,1)$. La direzione di R é espressa dal vettore $(1,1,1) - (0,1,1) = (1,0,0)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (t,1,1)$.

$R(t) = (t, 1, 1)\,.$

3/30

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}$, $y = \pi\, t + 3$, $z = 1 - \pi\, t$ e $x = 0$, $y = 3 + \sqrt{2} - s$, $z = 1 + s$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

È evidente che le due rette sono parallele in quanto hanno direzione $(0, \pi, -\pi)$ e $(0, -1, 1)$ rispettivamente. (Di fatto risulta altresì evidente che R_1 trova una riscrittura parametrica più semplice come $x = \sqrt{2}$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$, ed a questo punto il parallellismo è, se possibile, ancora più evidente). Dal parallellismo disegue la coplanarità.

La direzione comune alle due rette è quella espressa dal versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$. Un modo pratico di misurare la distanza tra R_1 ed R_2 è pertanto quello di prendere la norma del prodotto vettoriale tra il versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$ ed un qualsiasi vettore spostamento da un punto di R_1 ad un punto di R_2. Come vettore spostamento risulta conveniente prendere $R_2(0) - R_1(0) = (0, 3 + \sqrt{2}, 1) - (\sqrt{2}, 3, 1) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ottenendo

$$d(R_1, R_2) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right| = |(0, -1, 1) \wedge (-1, 1, 0)| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,.$$

Resta così confermato che le due rette siano distinte.

$$\boxed{\begin{array}{ll} d(R_1, R_2) = \left|(0, -1, 1)/\sqrt{2} \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)\right| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,. & \\ \text{le rette } R_1 \text{ e } R_2 \text{ sono parallele e distinte} & 3{+}1/30 \end{array}}$$

Un procedimento alternativo per il computo della distanza tra le due rette R_1 ed R_2 poteva essere quello di scegliere un qualsiasi punto di R_1, come $R_1(0) = (\sqrt{2}, 3, 1)$ e ricercare il punto di R_2 a minima distanza da esso minimizzando il funzionale $d(R_2(s), R_1(0))$ visto come funzione della sola variabile s. Di fatto, vista la monotonia della funzione radice, basta ricercare quel valore di s che minimizza il funzionale $(0 - \sqrt{2})^2 + ((3 + \sqrt{2} - s - 3)^2 + ((1 + s) - 1)^2$, ossia quello che minimizzi il funzionale $(\sqrt{2} - s)^2 + (s)^2 = 2 - 2\sqrt{2}\, s + 2\, s^2$. Il valore di s ricercato é $-\sqrt{2}/2$ e

$$d(R_1, R_2) = d(R_1(0), R_2(-\sqrt{2}/2)) = d((\sqrt{2}, 3, 1), (0, 3 + \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2)) = \sqrt{2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{3}\,.$$

2. È data la funzione $F(x, y) = (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2)$.

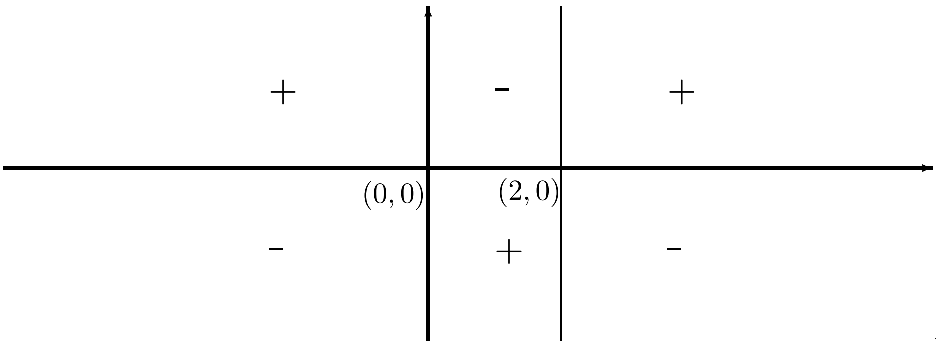
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2) = x^2 - 2\,xy + y^2 + x^2 y - x^2 - y^2 = x^2 y - 2\,xy \\ &= x(x - 2)y\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = x(x-2)y$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x-2)$ o y. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = \pm 2 \vee y = \pm 0\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x(x-2)y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y & = & 0 \\ x(x-2) & = & 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, 0)$ e $(2, 0)$. Si noti che entrambi i punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che entrambi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

2 PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

Entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, 0)$;

In effetti, per $i = 0, 1, 2$, il punto $(i, 0, 0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(i, 0) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0, 0)$ e $(2, 0)$ sono punti stazionari, i piani Π_0 e Π_2 sono perfettamente orrizzontali, ed essendo entrambi disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_1. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(1,0) = F_x(1,0)\,(x-1) + F_y(1,0)\,(y-0)$ ed otteniamo l'equazione $z = 0\,(x-1) - 1\,y$, che si semplifica in $z = -y$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0,0)$ a $(2,0)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ Π_1: $z = -y$ Π_2: $z = 0$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 12\,\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R, e pertanto il piano è di andarli a stanare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ e $g_x = 2\,x - 2$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ x(x-2) & = F_y = \lambda g_y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 - 2\,x & = g(x,y) & = & 12\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo di fatto assumere $\lambda \neq 0$. Nel massaggiare e combinare opportunamente le equazioni, meglio vederci, e vale pertanto la pena spendere l'osservazione preliminare che R altro non è che un cerchio con centro nel punto $(1, 0)$.

A questo punto non dovrebbe sorprendere che la prima equazione è soddisfatta in corrispondenza di $x = 1$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $y = \pm\sqrt{13}$; a questo punto il soddisfacimento della seconda equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente la cosa, risulta evidente che i poli sud e nord del cerchio siano punti estremali, con $F(1, \pm\sqrt{13}) = \mp\sqrt{13}$.

L'esclusione di queste due ovvie soluzioni conduce ad una semplificazione delle equazioni ottenuta assumendo $x \neq 1$. In effetti, se $x \neq 1$, allora la prima equazione si semplifica drammaticamente in $\lambda = y$, che, infornato nella seconda equazione porta a conludere che $2\,y^2 = x(x-2)$. Questa equazione combinata con la terza (per praticità, si moltiplichi la terza equazione per 2 ed in essa si sostituisca quindi $2\,y^2 = x(x-2)$) conduce ad un'equazione di secondo grado le cui radici sono $x = -2$ ed $x = 4$. A ciascuna di esse corrispondono 2 valori per y ($y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$) per un totale di 4 punti estremali dalle evidenti simmetrie. In effetti la F presenta le simmetrie $F(x,-y) = -F(x,y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse delle x) e $F(1+x,y) = F(1-x,y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse $x = 1$). Ora, $F(4,2) = 16 > \sqrt{13}$ e pertanto questi quattro punti sono tutti estremi assoluti.

2.d)

2 Max Assoluti: $(-2,2)$ e $(4,2)$; $F(-2,2) = F(4,2) = 16$

2 Min Assoluti: $(-2,-2)$ e $(4,-2)$; $F(-2,-2) = F(4,-2) = -16$

1 Max Relativo: $(1,-\sqrt{13})$; $F(1,-\sqrt{13}) = \sqrt{13}$

1 Min Relativo: $(1,\sqrt{13})$; $F(1,\sqrt{13}) = -\sqrt{13}$ 6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \log_2 x(x-2)y$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x(x-2)y > 0 \right\}$$

1/30