Prova scritta di Matematica 7 luglio 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. **(3pt)** Dimostrare per induzione che ogni insieme finito e non vuoto S di numeri reali ammette massimo, ossia contiene un numero $\overline{x}$ tale che $\overline{x} \geq y$ per ogni $y \in S$.

dimostrazione

Per induzione su $|S|$, il numero di elementi in S.

BASE: se $|S| = 1$ si prenda come $\overline{x}$ l'unico elemento in S. Funzia vero?

PASSO: se $|S| > 1$, sia z un qualsiasi elemento di S e si applichi induzione su $S' := S \setminus \{z\}$:

sia $\overline{x'}$ il massimo in S' e si osservi come o $\overline{x'}$ o z é massimo in S.

3/30

2. **(12pt)** Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere (+ fornendo dimostrazioni) e quali sono false (+ fornendo controesempi).

(1+2pt) ogni insieme superiormente limitato di razionali ammette massimo;

(0+2pt) ogni insieme superiormente limitato di reali ammette massimo;

(1+3pt) l'assioma di completezza vale anche per i numeri interi;

(1+2pt) ogni funzione continua in un dato intervallo limitato ha almeno un massimo su detto intervallo.

3. **(5pt)** Si calcoli:

$\lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{\tan\left(x^3\right)}-1}{x\left(\cos(x)-e^{x^2}\right)} =$

Sostituendo 0 ad x otteniamo $\frac{1-1}{0(1-1)} = \frac{0}{0}$ per una forma indeterminata.

Per semplificare, converrá riferirsi agli sviluppi di Taylor:

$$e^x = 1 + x + o(x),\ \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),\ \tan x = x + o(x)$$

pervenendo a $\lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{\left(x^3+o(x^3)\right)}-1}{x\left[\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-(1+x^2+o(x^2))\right]} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{1+x^3+o(x^3)-1}{x\left(-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)} = -\frac{2}{3}$.

5/30

Si sarebbe potuto risolvere anche con applicazioni ripetute dell'Hopital, ma l'impiego degli sviluppi di Taylor a fine semplificatorio ci consegna quí chiaramente una maggior rapiditá di lettura della situazione.

4. **(6pt)** Si calcoli $\int \frac{x^3+3\,x^2+x\,\sqrt{x^2+5}}{x^2+5}$.

Siccome vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte, l'unica cosa che ci preoccupa è la radice al numeratore. Isoliamo questo problema sfruttando la linearità dell'integrale e poi giochiamo le conseguenti semplificazioni.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+3\,x^2+x\sqrt{x^2+5}}{x^2+5} &= \int \frac{x^3+3\,x^2}{x^2+5}d\,x+\int \frac{x\sqrt{x^2+5}}{x^2+5}d\,x \\
&= \int x+3+\frac{-5x-15}{x^2+5}d\,x+\int \frac{1}{2\,\sqrt{x^2+5}}d\,(x^2+5) \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\int \frac{-5x-15}{x^2+5}d\,x-\frac{1}{3}\frac{1}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\frac{5}{2}\int \frac{(2\,x)}{x^2+5}d\,x-\int \frac{15}{x^2+5}d\,x-\frac{1}{3\,\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+5}d\,(x^2+5)-3\,\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}d\,x-\frac{1}{3\,\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\frac{5}{2}\log(x^2+5)-3\,\sqrt{5}\,tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{3\,\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Dove sul lato della polinomiale fratta (con denominatore polinomio giá primo, di grado 2) si è prima eseguita la divisione per rendere il grado del numeratore inferiore al grado del denominatore e poi si è scomposto il numeratore in un termine costante ed in un termine proporzionale alla derivata del denominatore.

$\int \frac{x^3+3\,x^2+x\sqrt{x^2+5}}{x^2+5} =$

Scomposizione del numeratore in parte polinomiale e non, con poi divisione:

$\int \frac{x^3+3\,x^2}{x^2+5} d\,x + \int \frac{x\sqrt{x^2+5}}{x^2+5} d\,x = \int x + 3 + \frac{-5\,x-15}{x^2+5} d\,x + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} d\,x.$

La linearitá dell'integrale ha spezzato il problema in 4, di cui 2 immediati:

$\int x = \frac{x^2}{2}$ e anche $\int 3 = 3\,x$

E gli altri 2 facilmente maneggiabili:

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} d\,x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} d\,(x^2+5) = -\frac{1}{3\,(x^2+5)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{-5\,x-15}{x^2+5} d\,x = -\frac{5}{2} \int \frac{(2\,x)}{x^2+5} d\,x - \int \frac{3}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} d\,x = -\frac{5}{2} \log(x^2+5) - 3\sqrt{5}\,tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$

Quindi $\int \frac{x^3+3\,x^2+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + 3\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3\sqrt{5}\,tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{3\,(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

8/30

5. (4pt)

Calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa della matrice assegnata affianchiamo ad essa una matrice identitá:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo cosí affiancato sulla destra della matrice assegnata la matrice che vorremo invece ottenere moltiplicandola per l'invera, ossia l'identitá.

Nel seguito cercheremo appunto di trasformare la matrice assegnata (la matrice 4×4 che resta sulla parte sinistra) nella matrice identitá operando solo tramite operazioni di riga (aggiungere o togliere ad una riga un multiplo di un'altra riga). Lasceremeo che queste operazioni abbiano effetto anche sulla 4×4 a destra in modo che esse restino "memorizzate" su quella che all'inizio era un'identitá ed alla fine sará un inversa.

Bando alle ciance, cerchiamo ora di costruite la matrice identitá 4×4 sulla sinistra. Cerchiamo di sistemare innanzitutto la prima colonna, cosa che possiamo fare semplicemente sommando la prima riga alla terza:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si noti come nella ex-identitá sulla destra sia ora memorizzata la prima operazioni di riga da effettuarsi per portare la matrice assegnata nella situazione corrente. Per sistemare la seconda colonna, dividiamo per 2 la terza riga, sottraiamola alla prima, e scambiamola con la seconda.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemiamo ora la terza colonna con uno scambio ed una somma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Per sistemare l'ultima colonna divido per 2 l'ultima riga e poi la tolgo alla penultima.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

In conclusione:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

4/30

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a. piano Π_1 passante per i punti $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ e $(2,3,1)$;

1.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$ e la retta $x + y = z = 1$;

1.c. piano Π_3 tangente alla superfice $x^2 - 2\,y + z^2 = 3$ nel punto $(1,-1,0)$;

1.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $x + y + z = 6$ ed é questa l'equazione che caratterizza il piano Π_1. Verificare per assicurarsene. Si noti che anche l'equazione $x \cdot y \cdot z = 6$ é soddisfatta da tutti e 3 i punti, tuttavia essa non é l'equazione di un piano ma descriverà invece un altro tipo di superfice passante per i 3 punti.

Se il piano Π_2 contiene la retta $x + y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $2\,x + y = 1$ e $z = 1$, ossia $\alpha x + \alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $x + y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$, che comporterebbe $1 + 3\,t - 3\,\beta t = 1 + \beta$ per ogni t, la qual condizione non riusciamo a stabilire per nessun β. Sembrerebbe che il piano Π_2 non possa esistere, ossia che le rette assegnate siano sghembe. In effetti le rette non possono essere parallele poiché una vive nel piano $z = 1$ in cui l'altra risulta incidente per $t = -\frac{1}{3}$ E non si incontrano poiché $R\left(-\frac{1}{3}\right) = (1, -2, 1)$ non appartiene alla seconda retta.

Il vettore ortogonale alla superfice $F(x, y) = x^2 - 2\,y + z^2 = 3$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0, y_0, z_0)}$ e quindi in $(1, -1, 0)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(2, -2, 0)$, che preferiamo rimpiazzare con $(1, -1, 0)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(1, -1, 0)$ e passante per $(1, -1, 0)$. Il generico punto (x, y, z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(1, -1, 0)$ eguaglia quello di $(1, -1, 0)$, che é 2.

Π_1: $x + y + z = 6$	Π_1 (-) Π_2 (-) Π_3 (H) Π_1
Π_2: non esiste	
Π_3: $x - y = 2$	1+1+1+2/30

2. È data la funzione $F(x, y) = (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2)\,.$

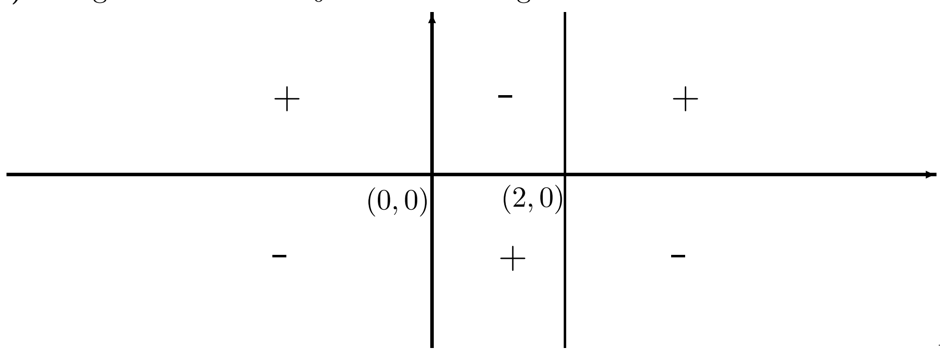
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2) = x^2 - 2\,xy + y^2 + x^2 y - x^2 - y^2 = x^2 y - 2\,xy \\
&= x(x - 2)y\,.
\end{aligned}
$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = x(x-2)y$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x-2)$ o y. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = \pm 2 \vee y = \pm 0 \ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x(x-2)y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, 0)$ e $(2, 0)$. Si noti che entrambi i punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che entrambi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

2 PUNTI STAZIONARI: $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

Entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

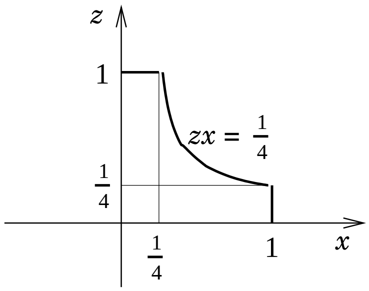
4/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dagli assi, dalle rette $x = 1$ e $z = 1$, e dalla curva $xz = \frac{1}{4}$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

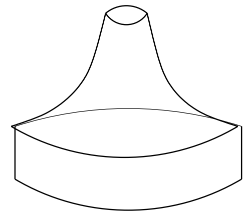
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ z \leq \frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2}} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ z \leq \frac{1}{4\rho} \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\min\left\{1, \frac{1}{4\rho}\right\}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho \int_0^{\min\left\{1, \frac{1}{4\rho}\right\}} 1 \, dz \, d\rho \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 \rho \left(\min\left\{1, \frac{1}{4\rho}\right\} \right) \, d\rho \right) = 2\pi \int_0^1 \min\left\{\rho, \frac{1}{4}\right\} \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{4}} \rho \, d\rho + 2\pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4} \, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{4}} + 2\pi \left[\frac{1}{4}\rho \right]_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{32} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right] = \frac{7}{16}\pi \, . \end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\rho} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \frac{7}{16}\pi$

5/30