Prova scritta di Matematica 14 giugno 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (3pt) Dimostrare per induzione che

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

dimostrazione

Per ogni naturale positivo n, sia $f(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

Base: calcolo $f(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ proprio come $\frac{1}{1+1}$.

Passo: verifico l'identità per $n+1$ assumendola per n:

$$f(n+1)=f(n)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

3/30

2. (12pt) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere (+ fornendo dimostrazioni) e quali sono false (+ fornendo controesempi).

(1+2pt) ogni successione limitata e monotona di razionali converge ad un razionale;

(1+2pt) ogni successione limitata e monotona di numeri interi converge ad un numero intero;

(0+3pt) ogni successione limitata e monotona di numeri reali converge ad un numero reale;

(1+2pt) ogni funzione continua in un dato intervallo limitato ha almeno un massimo su detto intervallo.

3. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos(x)-e^{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}=$

Sostituendo 0 ad x otteniamo $\frac{1-1}{0-0}=\frac{0}{0}$ per una forma indeterminata.

Per semplificare, converrá riferirsi agli sviluppi di Taylor:

$$(1\pm x^2)^{\frac{1}{4}}=1\pm\frac{1}{4}x^2+o(x^2),\ \cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$$

pervenendo a $\lim_{x\mapsto 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-1-x^2+o(x^2)}{1+\frac{1}{4}x^2-1+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=-3.$

5/30

Si sarebbe potuto risolvere anche con due applicazioni consecutive dell'Hopital, ma l'impiego degli sviluppi di Taylor a fine semplificatorio ci consegna quí chiaramente una maggior rapiditá di lettura della situazione.

4. (6pt) Si calcoli $\int \frac{x^3+3\,x^2+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$.

Siccome vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte, l'unica cosa che ci preoccupa è la radice al numeratore. Isoliamo questo problema sfruttando la linearità dell'integrale e poi giochiamo le conseguenti semplificazioni.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+3\,x^2+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} &= \int \frac{x^3+3\,x^2}{x^2+1}d\,x + \int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}d\,x \\
&= \int x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}d\,x + \int \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}d\,(x^2+1) \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\int \frac{x+3}{x^2+1}d\,x+\sqrt{x^2+1} \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\frac{1}{2}\int \frac{(2\,x)}{x^2+1}d\,x-\int \frac{3}{x^2+1}d\,x+\sqrt{x^2+1} \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d\,(x^2+1)-3\,tg^{-1}\,x+\sqrt{x^2+1} \\
&= \frac{x^2}{2}+3\,x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-3\,tg^{-1}\,x+\sqrt{x^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Dove sul lato della polinomiale fratta (con denominatore polinomio giá primo, di grado 2) si è prima eseguita la divisione per rendere il grado del numeratore inferiore al grado del denominatore e poi si è scomposto il numeratore in un termine costante ed in un termine proporzionale alla derivata del denominatore.

$\int \frac{x^3+3\,x^2+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} =$

Scomposizione del numeratore in parte polinomiale e non, con poi divisione:

$\int \frac{x^3+3\,x^2}{x^2+1} d\,x + \int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} d\,x = \int x + 3 + \frac{-x-3}{x^2+1} d\,x + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} d\,x.$

La linearitá dell'integrale ha spezzato il problema in 4, di cui 2 immediati:

$\int x = \frac{x^2}{2}$ e anche $\int 3 = 3\,x$

E gli altri 2 facilmente maneggiabili:

$\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} d\,x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} d\,(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$

$\frac{-x-3}{x^2+1} d\,x = -\frac{1}{2} \int \frac{(2\,x)}{x^2+1} d\,x - \int \frac{3}{x^2+1} d\,x = -\frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3\,tg^{-1}\,x$

Quindi $\int \frac{x^3+3\,x^2+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + 3\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3\,tg^{-1}\,x + \sqrt{x^2+1}$

8/30

5. (4pt)

Calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa della matrice assegnata affianchiamo ad essa una matrice identitá:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo cosí affiancato sulla destra della matrice assegnata la matrice che vorremo invece ottenere moltiplicandola per l'invera, ossia l'identitá.

Nel seguito cercheremo appunto di trasformare la matrice assegnata (la matrice 4×4 che resta sulla parte sinistra) nella matrice identitá operando solo tramite operazioni di riga (aggiungere o togliere ad una riga un multiplo di un'altra riga). Lasceremeo che queste operazioni abbiano effetto anche sulla 4×4 a destra in modo che esse restino “memorizzate” su quella che all'inizio era un'identitá ed alla fine sará un inversa.

Bando alle ciance, cerchiamo ora di costruite la matrice identitá 4×4 sulla sinistra. Cerchiamo di sistemare innanzitutto la prima colonna, cosa che possiamo fare semplicemente sottraendo la prima riga alla seconda ed alla terza riga:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si noti come nella ex-identitá sulla destra siano ora memorizzate le prime due operazioni di riga da effettuarsi per portare la matrice assegnata nella situazione corrente. Per sistemare la seconda colonna invertiamo il segno della seconda riga, e poi la sommiamo alla terza e togliamo alla prima.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemiamo ora la terza colonna:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Per sistemare l'ultima colonna divido per 2 l'ultima riga e poi la aggiungo o tolgo alle altre righe come necessario per annullare tutte le altre entries della quarta colonna.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

In conclusione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a. piano Π_1 passante per i punti $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ e $(4,6,5)$;

1.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$ e la retta $2\,x + y = z = 1$;

1.c. piano Π_3 tangente alla superfice $x^2 + y + z = 3$ nel punto $(1,1,1)$;

1.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $2\,x - y - z = -3$ che é quindi equazione che caratterizza il piano Π_1. Verificare per assicurarsene (e meglio comprendere). E se il terzo punto fosse stato $(4,5,6)$?

Se il piano Π_2 contiene la retta $2\,x + y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $2\,x+y = 1$ e $z = 1$, ossia $2\,\alpha x+\alpha y+\beta z = 1(\alpha+\beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $2\,x + y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$, che comporta $2 + 3\,t - 3\,\beta t = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $2\,x + y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x,y) = 3\,x^2 + 3\,y + 3\,z = 9$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right) \|_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1,1,1)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(6,3,3)$, che preferiamo rimpiazzare con $(2,1,1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(2,1,1)$ e passante per $(1,1,1)$. Il generico punto (x,y,z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(2,1,1)$ eguaglia quello di $(1,1,1)$, che é 4.

Π_1: $2\,x - y - z = -3$	Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $2\,x + y + z = 2$	
Π_3: $2\,x + y + z = 4$	1+1+1+2/30

2. È data la funzione $F(x,y) = x^3 - 2\,x^2 + x - 4\,x\,y^2$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F:

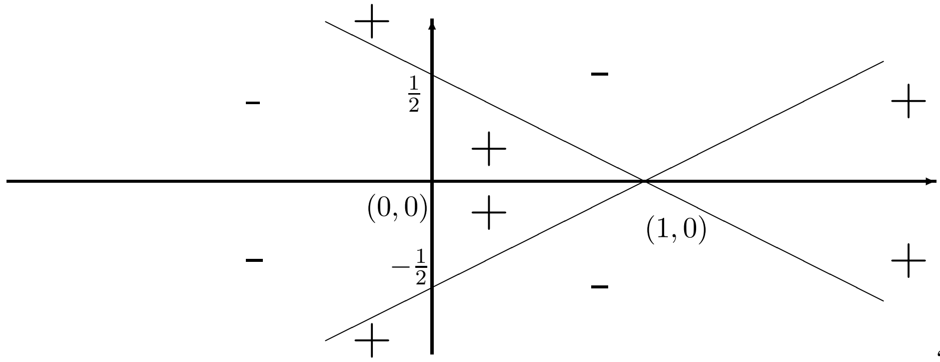
$F(x,y) =$

$$
\begin{array}{rcl}
F(x,y) = & x^3 - 2\,x^2 + x - 4\,x\,y^2 & \text{come data} \\
= & x(x^2 - 2\,x + 1 - 4\,y^2) & \text{raccogliamo la } x \\
= & x((x-1)^2 - 4\,y^) & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\
= & x\,((x-1) + 2\,y)((x-1) - 2\,y) & \text{prodotto notevole } a^2 - b^2 \\
= & x\,(x + 2\,y + 1)(x - 2\,y - 1)\,. & \text{già fattorizzata}
\end{array}
$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x\,(x+2\,y+1)(x-2\,y-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla x o $(x+2\,y+1)$ o $)(x-2\,y+1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \vee y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 7 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 3\,x^2 - 4\,x + 1 - 4\,y^2$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -8\,xy$ e dobbiamo ricercare i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 3\,x^2 - 4\,x + 1 - 4\,y^2 &= 0 \\ -8\,xy &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che dovrà essere nulla la x oppure la y. Procedendo sui due casi si determinano 4 punti stazionari: $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0, \pm\frac{1}{2})$ e $(1,0)$ sono punti di sella. Per determinare la natura del punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ possiamo provare con il test delle derivate seconde, andando ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,x-4 & -8\,y \\ -8\,y & -8\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} 6\,x-4 & -8\,y \\ -8\,y & -8\,x \end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{3},0\right)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} -2 & -0 \\ -0 & -8/3 \end{bmatrix}\right) = \frac{16}{3}$$

è positivo. Poichè $F_{xx}\left(\frac{1}{3},0\right) < 0$ ne consegue che $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è punto di massimo locale. In effetti un tale massimo doveva essere presente nella regione triangolare evidenziato con lo studio di Σ_0; e il punto reperito risulta anche ben collocato (sull'asse delle x) considerato che $F(x,-y) = F(x,y)$.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $\left(0,\pm\frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

I punti $\left(0,\pm\frac{1}{2}\right)$ e $(1,0)$ sono selle.

Il punto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è un massimo locale.

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dagli assi e dalla curva $z = (x-1)^2$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

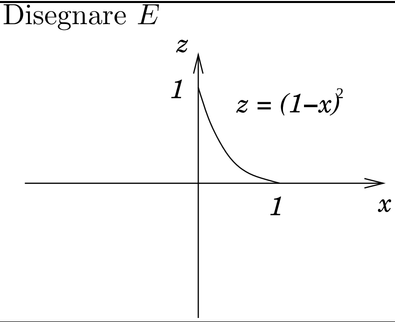
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

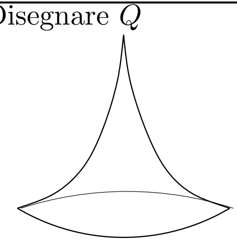
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

La figura piana E, situata nel primo quadrante, è contornata dagli assi e da un ramo della parabola $z = (x-1)^2$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + \rho^2 - 2\rho \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho^2-2\rho} \rho \, dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho \int_0^{1+\rho^2-2\rho} 1 \, dz\, d\rho\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\,\pi\,\left(\int_0^1 \rho(1+\rho^2-2\,\rho)\ d\rho\right) = 2\,\pi\,\left[\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}-\frac{2}{3}\rho^3\right]_0^1 \\
&= 2\,\pi\,\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right] = \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} \rho\ dz\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{6}$

5/30