Prova scritta di Matematica 22 febbraio 2011 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (2+2+3+3pt) Fornire la definizione di limite (finito) di una successione a_n. Dimostrare che $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$, se esiste, é sempre unico. Dimostrare che una successione monotona non-decrescente e limitata superiormente ammette sempre limite. Enunciare in modo preciso, e poi dimostrare, il teorema per la somma di limiti.

definizione limite

Diremo che il limite $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ esiste e vale ℓ se

comunque venga fissato un valore $\varepsilon > 0$

esiste allora un naturale $N = N(\varepsilon)$ tale che

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

2/30

unicitá limite

Siano ℓ_1 ed ℓ_2 due valori per cui valga la proprietá definitoria di limite

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono N_1 ed N_2 tali che

$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\,\varepsilon$ per ogni $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

ma se $|\ell_1 - \ell_2|$ é piú piccolo di ogni valore positivo allora é nullo e $\ell_1 = \ell_2$.

2/30

esistenza per successioni monotone

Poiché l'insieme dei valori $\{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ é limitato superiormente, avrá estremo superiore.

Chiamiamolo ℓ. Quindi $\ell \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ma anche ...

comunque preso $\varepsilon > 0$, esisterá quindi un valore $a_{\overline{n}} > \ell - \varepsilon$

quindi $0 \leq \ell - a_n < \varepsilon$ per ogni $n \geq \overline{n}$, per monotonia.

Quindi l'estremo superiore delle immagini soddisfa alla proprietá definitoria di limite.

3/30

somma di limiti

Se $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ esiste finito e vale ℓ_1 e inoltre $\lim_{n\mapsto\infty} b_n$ esiste finito e vale ℓ_2 allora, dove $c_n = a_n + b_n$, esiste il $\lim_{n\mapsto\infty} c_n$ e vale $\ell_1 + \ell_2$.

Infatti, comunque preso $\varepsilon > 0$, sappiamo esistere N_1 ed N_2 tali che $|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ per ogni $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, che in buona conclusione é quanto volevasi dimostrare.

1+2/30

2. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x\mapsto 0} \frac{x^2-\tan(x^2)}{x^2-\sin(x^2)} =$

Sostituendo 0 ad x otteniamo $\frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0}$ per una forma indeterminata.

Per semplificare, converrá sostituire t a x^2, e poi riferirsi agli sviluppi di Taylor:

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ e $\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$

pervenendo a $\lim_{t\mapsto 0} \frac{t-(t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3))}{t-(t+\frac{1}{3}t^3+o(t^3))} = \lim_{t\mapsto 0} \frac{\frac{1}{6}t^3+o(t^3)}{-\frac{1}{3}t^3+o(t^3)} = -2.$

5/30

Si sarebbe potuto risolvere anche con due applicazioni consecutive dell'Hopital, ma l'impiego degli sviluppi di Taylor a fine semplificatorio puó consegnarci una maggior rapiditá di lettura della situazione, e quindi é bene sapersene avvalere all'occorrenza (eventualmente si cerchi “limiti con Taylor” sotto internet per reperire materiale/esercizi che consentano di approfondire questa competenza).

3. (8pt) Si calcoli $\int \frac{x^7-x^6+2\,x^5-x^4+2\,x^3+x^2}{x^5-x^4+2\,x^3-2\,x^2+x-1}$.

Vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte come questa. Il primo passo consiste nel fare si che il grado del numeratore sia inferiore al grado del denominatore, cosa che si ottiene avvalendosi dell'algoritmo per la divisione dei polinomi.

Ci limitiamo solo ad effettuare la verifica del risultato della divisione; assumiamo infatti che conosciate l'algoritmo per effettuarla voi; in caso contrario consultate internet, ad esempio a

`http://it.wikipedia.org/wiki/Divisione_dei_polinomi`

Ecco il solo risultato, e la sempre importante verifica.

$$x^2 + \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1} \quad = \quad \frac{x^2(x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1) + (x^4 + x^3 + 2\,x^2)}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x^7 - x^6 + 2\,x^5 - 2\,x^4 + x^3 - x^2) + (x^4 + x^3 + 2\,x^2)}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1} \\
&= \frac{x^7 - x^6 + 2\,x^5 - x^4 + 2\,x^3 + x^2}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1}\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che in questo punto viene inoltre sfruttata la linearitá dell'operatore integrale:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^7 - x^6 + 2\,x^5 - x^4 + 2\,x^3 + x^2}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1} &= \int x^2 + \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1} \\
&= \int x^2 + \int \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2}{x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1}\,.
\end{aligned}
$$

Ed ecco che ora il grado del numeratore é stato ridotto come desiderato.

Il prossimo passo non é scontato: vogliamo conoscere tutto del polinomio al denominatore, ossia fattorizzarlo. Il teorema fondamentale dell'algebra garantisce che ogni polinomio é esprimibile come prodotto di polinomi di grado al piú 2. Tuttavia, dal grado 5 in su, non esiste un metodo che produca tale scomposizione. Nel nostro caso il grado é 5, e quindi, aguzziamo i nostri sensi, rimbocchiamoci le maniche, e "speriamo che io me la cavo". Ci piacerebbe cadere puliti, ossia ci piacerebbe trovare radici intere. Se tali radici esistono esse devono per forza dividere il termine noto; ció ci lascia con due soli candidati: ± 1. Per verificare se questi sono effettivamente radici il test (di Ruffini) é semplice: valuto il polinomio in ± 1. Si scopre cosí che -1 non é radice ma $+1$ lo é. Quindi il polinomio in questione é divisibile per il polinomio di primo grado $(x-1)$ che esprime la radice $x = 1$. Effettuo quindi tale divisione (questa volta, in questo caso particolare di divisione per un polinomio di primo grado) converrá avvalersi della divisione di Ruffini (anche questa facilmente reperibile in internet, vedere anche al sito segnalato sopra). Otteniamo

$$x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1 = (x-1)(x^4 + 2\,x^2 + 1)\,.$$

Per procedere nella scomposizione (a parte che da grado 4 in giú é noto un procedimento che determina la scomposizione) possiamo questa volta osservare che $x^4 + 2\,x^2 + 1$ é il quadrato di $(x^2 + 1)$.

Possiamo ora facilmente verificare la correttezza della fattorizzazione complessiva:

$$(x-1)(x^2+1)^2 = (x-1)(x^4 + 2\,x^2 + 1) = x^5 - x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1\,.$$

Un'altro modo di verificarla é controllare che le sostituzioni $x = 1$ e $x^2 = -1$ portino all'annichilamento del polinomio. Purtroppo in questo modo non riusciamo a verificare la radice doppia. Se insistiamo sul verificare anche la radice doppia, proviamo a consumare una digestione del polinomio sulla base dell'enzima $x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$, il che se lo pappa con rutto. Quindi la fattorizzazione canta bene che é un piacere.

Il prossimo passo consiste nell'effetuare la scomposizione di Hermite, ossia nel cercare una riscrittura della polinomiale fratta integranda nella seguente forma:

$$\frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}\,.$$

Fu appunto Hermite a dimostrare che una tale scomposizione esiste sempre e a dare un metodo (algoritmo) per determinarla, da cui il nome. Rimando ancora ad internet per approfondimenti. In particolare, alla pagina

`http://www.batmath.it/matematica/a_primitive/fratte.htm`

trovate chiaro e riassuntivo non solo la scomposizione di Hermite ma anche un po tutta l'integrazione di polinomiali fratte. Una volta che avete studiato da qualche parte il metodo, ecco il vostro primo vero esercizio al riguardo: lascio a voi scomporre questo caso del tema.

Fatto?

Bene, io mi limito a ripercorrere strada assieme a voi sulla cosa che é piú importante io vi trasmetta come modus operandi, e sul piano metodologico: la verifica. Verifichiamo assieme la correttezza di questo passaggio (scomposizione di Hermite), come da voi trovata:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} &= \frac{(x^2+1)^2 + (x-1)(x^2+1) + x(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(x^4 + 2\,x^2 + 1) + (x^3 - x^2 + x - 1) + x^2 - x)}{(x-1)(x^2+1)^2} \\
&= \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Ora, di nuovo, si é in condizioni di sfruttare la linearitá dell'operatore integrale:

$$\int \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{(x-1)} + \int \frac{1}{(x^2+1)} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,.$$

Questi tre integrali sono tutti gestibili in semplicitá:

$$\int \frac{1}{(x-1)} dx = \int \frac{1}{(x-1)} d(x-1) = \log|x-1|\,, \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)} = tg^{-1}x\,,$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)}\,.$$

$\int \frac{x^7-x^6+2\,x^5-x^4+2\,x^3+x^2}{x^5-x^4+2\,x^3-2\,x^2+x-1} =$

Divisione, fattorizzazione del denominatore, e scomposizione di Hermite:

$\int x^2 + \int \frac{x^4+x^3+2\,x^2}{x^5-x^4+2\,x^3-2\,x^2+x-1} = \int x^2 + \frac{x^4+x^3+2\,x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \int x^2 + \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}.$

La linearitá dell'integrale spezza ora il problema in 4, di cui 2 da tabella:

$\int x^2 = \frac{x^3}{3}$ e anche $\int \frac{1}{(x^2+1)} = tg^{-1}x$

E gli altri 2 facilmente maneggiabili:

$\int \frac{1}{(x-1)}dx = \int \frac{1}{(x-1)}d(x-1) = \log|x-1|$

$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}d(x^2+1) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)}$

Quindi $\int \frac{x^7-x^6+2\,x^5-x^4+2\,x^3+x^2}{x^5-x^4+2\,x^3-2\,x^2+x-1} = \frac{x^3}{3} + \log|x-1| + tg^{-1}x - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)}$

8/30

4. (4pt)

Calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa della matrice assegnata affianchiamo ad essa una matrice identitá:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo cosí affiancato sulla destra della matrice assegnata la matrice che vorremo invece ottenere moltiplicandola per l'invera, ossia l'identitá.

Nel seguito cercheremo appunto di trasformare la matrice assegnata (la matrice 4×4 che resta sulla parte sinistra) nella matrice identitá operando solo tramite operazioni di riga (aggiungere o togliere ad una riga un multiplo di un'altra riga). Lasceremeo che queste operazioni abbiano effetto anche sulla 4×4 a destra in modo che esse restino "memorizzate" su quella che all'inizio era un'identitá ed alla fine sará un inversa.

Bando alle ciance, cerchiamo ora di costruite la matrice identitá 4×4 sulla sinistra. Cerchiamo di sistemare innanzitutto la prima colonna, cosa che possiamo fare semplicemente sottraendo la prima riga alla seconda ed alla terza riga:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si noti come nella ex-identitá sulla destra siano ora memorizzate le prime due operazioni di riga da effettuarsi per portare la matrice assegnata nella situazione corrente. Per sistemare la seconda colonna invertiamo il segno della seconda riga, e poi la sommiamo alla terza e togliamo alla prima.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sitemiamo ora la terza colonna:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Per sistemare l'ultima colonna divido per 2 l'ultima riga e poi la aggiungo o tolgo alle altre righe come necessario per annullare tutte le altre entries della quarta colonna.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

In conclusione:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

4/30

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a. piano Π_1 passante per i punti $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ e $(2,2,2)$;

1.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (2, 3\,t, 5\,t)$ e la retta $x + y = z = 5$;

1.c. piano Π_3 tangente al grafico della funzione $z = x^2 - y^2 + 3$ nel punto $(1,1,5)$;

1.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il piano Π_1 conterrá la direzione $(1,1,1) = (2,3,4) - (1,2,3)$ e la direzione $(1,0,-1) = (2,2,2) - (1,2,3)$ ed é quindi ortogonale al vettore $(1,-2,1)$. Quindi $(1,-2,1) \cdot (x,y,z) = (1,-2,1) \cdot (1,2,3)$, ossia $x - 2y + z = 0$, é equazione che caratterizza il piano Π_1. Verificare per credere.

Se il piano Π_2 contiene la retta $x + y = z = 5$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $x + y = 5$ e $z = 5$, ossia $\alpha x + \alpha y + \beta z = 5(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 5$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $x + y + \beta z = 5 + 5\beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (2, 3\,t, 5\,t)$, che comporta $2 + 3\,t + 5\,\beta t = 5 + 5\beta$, da cui $\beta = -\frac{3}{5}$. É poi possibile verificare che il piano $x + y - \frac{3}{5}z = 2$, o se preferiamo $5\,x + 5\,y - 3\,z = 10$, contiene effettivamente ambo le rette.

Le derivate parziali della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3$ nel punto $(1,1)$ valgono 2 e -2. Quindi l'equazione del piano tangente il grafico della f nel punto $(1,1,5)$ é $z - 5 = 2(x-1) - 2(y-1)$, o piú semplicemente $2x - 2y - z + 5 = 0$.

I tre piani sono in posizione generica tra di loro.

Π_1: $x - 2y + z = 0$	Π_1 (G) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $5\,x + 5\,y - 3\,z = 10$	
Π_3: $z = 5 + 2x - 2y$	1+1+1+2/30

2. È data la funzione $F(x,y) = x\,y^2 - x^3 - x + 2\,x^2$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

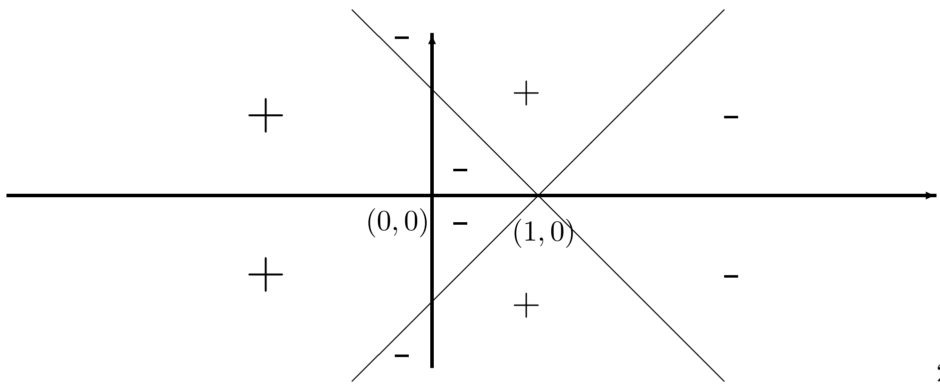
$F(x,y) =$

$$\begin{array}{rcll} F(x,y) &=& x\,y^2 - x^3 - x + 2\,x^2 & \text{come data} \\ &=& x(y^2 - x^2 - 1 + 2\,x) & \text{raccogliamo la } x \\ &=& x(y^2 - (x-1)^2) & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\ &=& x\,(y - (x-1))(y + (x-1)) & \text{prodotto notevole } a^2 - b^2 \\ &=& x\,(y - x + 1)(y + x - 1)\,. & \text{già fattorizzata} \end{array}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x\,(y-x+1)(y+x-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla x o $(y-x+1)$ o $(y+x-1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 1-x \vee y = -1+x\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 7 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,xy$ e dobbiamo ricercare i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 &= 0 \\ 2\,xy &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che dovrà essere nulla la x oppure la y. Procedendo sui due casi si determinano 4 punti stazionari: $(0,\pm 1)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3},0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0,\pm 1)$ e $(1,0)$ sono punti di sella. Per determinare la natura del punto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ possiamo provare con il test delle derivate seconde, andando ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\,x+4 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $\left(\frac{1}{3},0\right)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} -6\,x+4 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{3},0\right)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{3}$$

è positivo. Poichè $F_{xx}\left(\frac{1}{3},0\right) > 0$ ne consegue che $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è punto di minimo locale. In effetti un tale minimo doveva essere presente nel triangolo delle Bermude evidenziato dallo studio di Σ_0; e il punto reperito risulta anche ben collocato (sull'asse delle x) considerato che $F(x,-y) = F(x,y)$.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,\pm 1)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

I punti $(0,\pm 1)$ e $(1,0)$ sono selle.

Il punto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è un minimo locale.

5/30

5. Si determinino la lunghezza L e l'ascissa curvilinea $\ell(t)$ della spirale $\overline{s}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$. Si riparametrizzi la spirale in modo che, al variare di t, essa venga percorsa con velocitá unitaria in ogni suo punto.

Derivando $\overline{s}(t)$ otteniamo l'espressione della velocitá come vettore in funzione del tempo: $\overline{v}(t) = \overline{s}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 4\pi$. Ora, per quanto riguarda l'ascissa curvilinea all'istante t, ossia la strada percorsa lunga la spirale dall'istante $t_0 = 0$ all'istante t, avremo:

$$\ell(t) = \int_0^t |\overline{v}(t)|\, dt = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \int_0^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t$$

Si noti, incidentalmente, che la spirale viene percorsa a velocitá costante $v(t) = |\overline{v}(t)| = 2$. La lunghezza totale della pirale vale $L = \ell(4\pi) = 4\sqrt{2}\,\pi$. Volendo riparametrizzare, si inverta $\ell(t) = \sqrt{2}\, t$ in $t(\ell) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$, per poi sostituire tramite essa la t in $\overline{s}(t)$:

$$\overline{s}(t(\ell)) = (\cos t, \sin t, t) = \left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right) \quad 0 \leq \ell \leq 4\sqrt{2}\,\pi.$$

$\ell(t) = \sqrt{2}\, t$

2/30

$L = 4\sqrt{2}\,\pi$

3/30

$\overline{s}(t') = \left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t', \sin\frac{\sqrt{2}}{2}t', \frac{\sqrt{2}}{2}t'\right) \qquad 0 \leq t' \leq 4\sqrt{2}\,\pi$

3/30