Prova scritta di Matematica 3 febbraio 2011 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (2+1+3+2pt) Fornire la definizione di estremo superiore. Enunciare l'assioma di completezza ed utilizzarlo per dimostrare che ogni insieme di numeri reali limitato ha un estremo superiore. Dimostrare che l'estremo superiore é sempre unico.

estremo superiore

Sia S un sottoinsieme di un insieme totalmente ordinato T.

Un $\bar{t} \in T$ é detto un **maggiorante** di S se $s \leq \bar{t}$ per ogni $s \in S$.

Quando l'insieme dei maggioranti di S, chiamiamolo $M(S)$, ammette un minimo $\overline{M}_S$.

In altre parole, dovesse esistere un $\overline{M}_S \in M(S)$ tale che $\overline{M}_S \geq M$ per ogni $M \in M(S)$.

Allora questo minimo $\overline{M}_S$, se esiste, viene chiamato **estremo superiore** di S in T.

2/30

assioma di completezza

Questo assioma riguarda i numeri reali e stabilisce quanto segue:

Siano A e B due qualsiasi insiemi di reali tali che $a \leq b$ comunque presi $a \in A$ e $b \in B$.

Esiste allora un reale c tale che $a \leq c \leq b$ comunque presi $a \in A$ e $b \in B$.

1/30

esistenza

Si applichi l'assioma di completezza con $A = S$ e $B = M(S)$:

Si noti che $a \leq b$ comunque presi $a \in A$ e $b \in B$.

Esiste quindi un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$ comunque presi $a \in A$ e $b \in B$.

Si osservi che c é un maggiorante di A. (perché?)

Di fatto c é il minimo dei maggioranti. (perché?)

3/30

unicità

Abbiamo definito l'estremo superiore come il minimo dei maggioranti.

Ma il minimo di un insieme, se esiste, é unico.

Se infatti M_1 ed M_2 fossero due minimi diversi,
potremmo allora intendere, senza perdita di generalitá,
che $M_1 < M_2$ dato che l'ordinamento $<$ é totale.
Ma questo contraddirrebbe il fatto che M_2 sia minimo.

2/30

2. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\pi x} =$

Sostituendo 0 ad x otteniamo $\frac{e^{\sin 0} - 1}{\pi 0} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ per una forma indeterminata.

Applicando l'Hopital otteniamo $\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\pi x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos x \, e^{\sin x}}{\pi}$

Sfruttando il concetto di continuitá basta ora valutare la seconda espressione in $x = 0$:

$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\cos x \, e^{\sin x}}{\pi} = \frac{\cos 0 \, e^{\sin 0}}{\pi} = \frac{1}{\pi}$.

5/30

3. (8pt) Si calcoli:

$\int \frac{3}{x^2(x^2+1)^2} =$

Il primo passo consiste nell'ottenere una scomposizione di Hermite:

$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

La linearitá dell'integrale spezza ora il problema in 3.

Due delle primitive devono essere note (da tabella):

$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{(x^2+1)} = arctg\, x$

L'ultima puó essere calcolata. Applichiamo l'integrazione per parti:

$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{(x^2+1)} - x \int \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1}$

E cosí $\int \frac{3}{(x^2+1)^2} = 3\, arctg\, x + \frac{3}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{2} arct\, x$

Quindi $\int \frac{3}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{3}{x} - 3\, arctg\, x - 3\, arctg\, x - \frac{3}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2} arct\, x$

Raccogliendo: $\int \frac{3}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{3}{x} - \frac{9}{2} arctg\, x + \frac{3}{2} \frac{x}{x^2+1} = -\frac{3}{2} \frac{x^2+2}{x(x^2+1)} - \frac{9}{2} arctg\, x.$

PARTE Matematica II

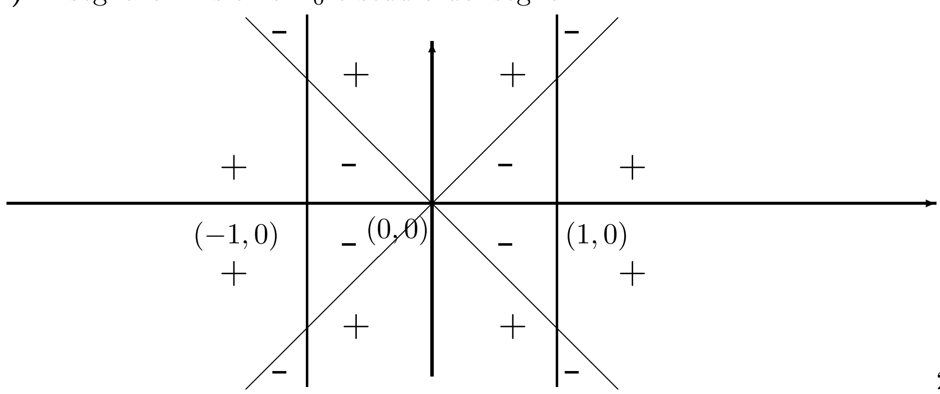
2. È data la funzione $F(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Occorre innanzitutto fattorizzare la F, il che viene semplice per raccoglimenti algebrici $F(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2 = x^2(x^2-1) - y^2(x^2-1) = (x^2-y^2)(x^2-1) = (x-y)(x+y)(x-1)(y-1)$ ma poteva anche essere condotto, come primo passo, semplicemente risolvendo nella y (equazione di secondo grado) o nella y^2 (equazione di primo grado). Ultimando la fattorizzazione, scriveremo $F(x,y) = (x-y)(x+y)(x-1)(x+1)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x \vee \vee x = \pm 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 10 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". Non essendoci in questo caso radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 4\,x^3 - 2\,xy^2 - 2, x = 2\,x(2\,x^2 - y^2 - 1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -2\,x^2y + 2\,y = 2\,y(1-x^2)$ e dobbiamo ricercare i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(2\,x^2 - y^2 - 1) &= 0 \\ 2\,y(1-x^2) &= 0, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione porta a considerare due casi:

$y = 0$ da cui seguirebbe $x = 0$ oppure $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 3 punti stazionari $(0,0)$ e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto

(a) é facile dedurre che $(0,0)$ è punto di sella. Inoltre, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ devono essere punti di minimo locale per la F visto che la F, essendo continua, deve avere un massimo ed un minimo in ogni chiuso e compatto (si consideri il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ dove la F, sempre non negativa, si annulla sui bordi e quindi dovrà pur avere un massimo da qualche parte nel mezzo, e questo massimo dovrà essere rilevato come punto stazionario per la differenziabilità della F);

$x = \pm 1$ da cui seguirebbe $y = \pm 1$ dalla prima equazione, e quindi otteniamo i 4 punti stazionari $(1, \pm 1)$ e $(-1, \pm 1)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che questi 4 punti sono selle.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$, $(1,\pm 1)$, $(-1,\pm 1)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

I punti $(0,0)$, $(1,\pm 1)$, $(-1,\pm 1)$ sono selle della F.

I punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ sono minimi locali della F.

6/30

2.c. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2 + y^2 \leq 4$.

I punti in Σ_0, presi unitamente ai punti con $x^2 + y^2 = 4$, contornano 18 regioni del piano, di cui 8 illimitate (dove $x^2 + y^2 \geq 4$) e 10 limitate (dove $x^2 + y^2 \leq 4$). La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto in ciascuna di queste 10 regioni limitate (e chiuse). Lo studio dei punti stazionari di cui sopra ha portato all'individuazione di 2 minimi in seno a due di queste regioni. Queste due regioni sono contornate dai soli punti di Σ_0 ed in esse il massimo vale 0 e si riscontra sulla frontiera. I punti critici sono giá stati tutti analizzati e gli eventuali massimi o minimi sono quindi tutti situati sul bordo $x^2 + y^2 = 4$. Viste le simmetrie in gioco possiamo giá dedurre che dei massimi saranno locati nei punti $(\pm 2, 0)$ e nei punti $(0, \pm 2)$, ma restano comunque da individuare i minimi nelle regioni illimitate con valore negativo dela F. In ogni caso, trovare gi estremi di $F(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^2 - x^2$ sul bordo $x^2 + y^2 = 4$, ossia dove $y^2 = 4 - x^2$, é del tutto equivalente a trovare gli estremi di $\overline{F}(x,y) = x^4 - x^2(4 - x^2) + (4 - x^2) - x^2 = 2\,x^4 - 6\,x^2 + 4$ tenendo presente che $x^2 \leq 4$. Derivando, otteniamo $\overline{F}'(x,y) = 8\,x^3 - 12\,x$ che si annulla, oltre che in $x = 0$ (una conferma), anche in $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ cui corrisponde $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ per 4 punti di minimo. I valori $F'(-2) < 0$ e $F'(2) > 0$ confermano i 2 massimi nei punti $(\pm 2, 0)$. Per stabilire poi quali massimi/minimi siano solo locali piuttosto che assoluti occorre valutare la F nei punti di interesse ed effettuare il confronto dei valori ottenuti.

2.d)

2 MAX ASSOLUTI: $(\pm 2, 0)$

2 MAX LOCALI: $(0, \pm 2)$

4 MIN ASSOLUTI: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

2 MIN LOCALI: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

5 SELLE: $(0,0)$, $(1,\pm 1)$, $(-1,\pm 1)$

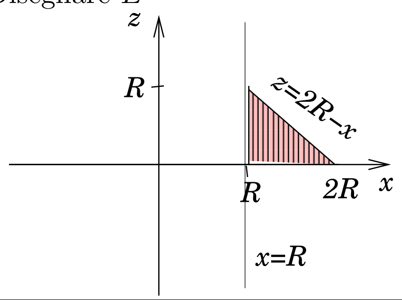
4/30

5. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E il triangolo del piano $y = 0$ di vertici $(R, 0)$, (R, R) e $(2\,R, 0)$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

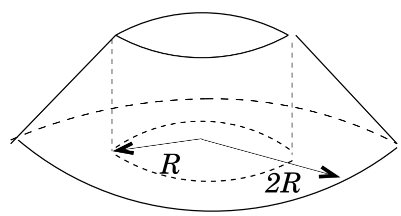
5.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);
5.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;
5.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;
5.d. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q.

La figura piana E è il triangolo di vertici $(R, 0)$, (R, R), e $(0, R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ R \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\,R - z \} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ R \leq \rho \leq 2\,R - z \ \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho\ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho\ d\rho\, dz\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho\ d\rho\, dz \right) = 2\,\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_R^{2\,R-z} dz \\ &= 2\,\pi \int_0^R 2\,R^2 - 2\,R\,z + \frac{z^2}{2} - \frac{R^2}{2}\ dz = 2\,\pi \left[2\,R^2\,z - R\,z^2 + \frac{z^3}{6} - \frac{R^2\,z}{2} \right]_0^R = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,. \end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho\ d\rho\, dz\, d\theta = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$

5/30

Per il computo della coordinata verticale del baricentro occorre effettuare il calcolo del seguente integrale che viene convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_R^{2\,R-z} z\,\rho\; d\rho\, dz\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R z\int_R^{2\,R-z}\rho\; d\rho\, dz\right) = 2\,\pi\int_0^R z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_R^{2\,R-z} d\rho \\
&= 2\,\pi\int_0^R 2\,R^2\,z - 2\,R\,z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{R^2\,z}{2}\; dz = 2\,\pi\left[R^2\,z^2 - \frac{2}{3}R\,z^3 + \frac{z^4}{8} - \frac{R^2\,z^2}{4}\right]_0^R = \frac{5}{12}\,\pi\,R^4\,.
\end{aligned}
$$

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{5}{12}\,\pi\,R^4}{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3} = \frac{5}{16}\,R\,.$$

e)	$x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{5}{16}\,R$
			5/30