Esame scritto Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 10 febbraio 2010

Nome Cognome: **Matricola:** **Anno iscrizione:**

Selezionare i moduli affrontati nel presente esame: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$

Gli studenti iscritti agli A.A. 2008-2009 e seguenti (ordinamento 270/04) non possono sostenere l'esame in due moduli separati. L'esame è quindi diviso nei due moduli seguenti con i relativi punti e livelli di sufficienza minimi da conseguire in entrambi (l'insufficienza in uno dei due moduli rende insufficiente l'esame):

1. matematica 1: 20 punti + 2 punti bonus, minimo 12 punti per la sufficienza;
2. matematica 2: 10 punti + 2 punti bonus, minimo 6 punti per la sufficienza.

Il tempo totale è di 3 ore.

Agli iscritti negli A.A. 2007-2008 e precedenti (ordinamento 509/99) che intendono sostenere solo uno dei moduli (per chi li affronta entrambi vale quanto scritto sopra) è aggiunta alla sezione corrispondente un numero di esercizi per 10 o 12 punti con un ricalcolo della sufficienza e del tempo come segue:

1. matematica 1: (20 + 2 punti bonus) + 10 punti, minimo 18 punti per la sufficienza, 3 ore;
2. matematica 2: (10 punti + 2 punti bonus) + (10 punti + 2 punti bonus), minimo 12 punti per la sufficienza (20 punti corrisponde al voto trenta/30), 2 ore.

Scrivete chiaramente e in buon italiano. Sono ammessi solo carta e penna.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ o i moduli $\boxed{1+2}$
(20 punti + 2 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$. Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (9 punti)

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si studi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+(\alpha-1)x-\alpha}$. (6 punti)

3. Si dimostri che la funzione $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f = \begin{cases} e^x - 1 \text{ se } x < 0 \\ x^\pi \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ è integrabile e quindi si calcoli l'integrale definito
$$\int_{-2}^{2} f(x)dx. \qquad \text{(3 punti)}$$

4. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ (4 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(2, f(2))$. (2 punti)

6. Si dimostri che la funzione $f(x) = e^x + x$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (4 punti)

7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$. (4 punti)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$
(10 punti + 2 punti bonus)

8. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (2+2t)\vec{i} + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}t^2\right)\vec{j} + \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{t^3}\right)\vec{k}$. Dopo aver verificato che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0,2])$ è regolare, si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$, si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$ e si esprima il parametro t in funzione di s (ossia, si inverta la funzione s). (4 punti)

9. Date la regione limitata $D \subseteq \mathbb{R}^3$ delimitata dalle superficie $\{z = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{y = 1 - x^2\}$ e $\{z + y = 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$, si disegni D e si calcoli l'integrale di volume $\iiint_D f dV$. (5 punti)

10. Siano $P = (2, -3, 5) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$, $R_1 = \{P + k\vec{v},\ k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = x - 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Determinare la distanza $d(R_1, R_2)$ tra le rette date e specificare se R_1 e R_2 sono sghembe, parallele o incidenti. (3 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{2}$ (10 punti + 2 punti bonus)

11. Si determini il piano osculatore alla curva $\mathscr{R}$ nel punto $P = \vec{r}(1) \in \mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $\mathscr{R}$ è come nell'esercizio 8 (si usi il parametro t e non la lunghezza d'arco). (5 punti)

12. Sono date la regione $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy}$. Si disegni D e si calcolino i punti critici interni a D, si dica di che tipo sono e si calcolino i massimi e minimi assoluti di f nel dominio D. (7 punti)