

La Relatività Generale.

Dr. Yves Gaspar,

Ph.D. (University of Cambridge, UK)

*Università Cattolica del Sacro
Cuore, Brescia*

*Department of Mathematics and
Physics.*

Motivazioni.

- La gravità newtoniana è incompatibile con il **principio di relatività della Relatività Speciale (RS)**, con la **legge di Galilei** per i corpi in caduta libera e con **l'azione a distanza** inerente al modello newtoniano.

- Estensione del principio di relatività al **moto non-uniforme, esiste il moto assoluto ?** Considerare **sistemi di riferimento non-inerziali**.

Analogia elettromagnetica.

- La transizione dalla gravità newtoniana alla Relatività Generale (RG) è stata paragonata da Albert Einstein alla **transizione dalla legge di Coulomb per l'interazione elettrica alla teoria di CAMPO di Faraday and Maxwell**. Le analogie con l'elettromagnetismo sono ricorrenti a traverso le ricerche di Einstein per la RG.

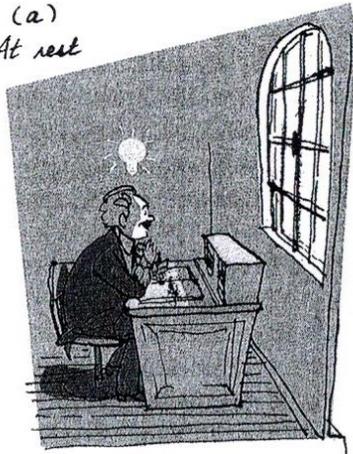
Postulati – principi guida.

- ◉ **Il principio di equivalenza (forte e debole)** ugualianza di massa gravitazionale e inerziale – equivalenza tra effetti inerziali e gravitazionali.
- ◉ **Covarianza generale:** le leggi fisiche debbono avere la stessa forma rispetto a qualsiasi sistema di riferimento – anche non-inerziale
- ◉ **Per i campi deboli e velocità piccole:** gli effetti previsti dalla RG debbono essere gli stessi che quelli previsti dalla teoria newtoniana.
- ◉ **Il principio di Mach:** non esiste lo spazio assoluto e nemmeno il moto assoluto, i movimenti debbono essere descritti rispetto a corpi materiali.
- ◉ **La conservazione dell'energia-impulso (quantità di moto):** dev'essere soddisfatta da tutti i processi.

Il principio di equivalenza.

(I) On Earth

(a)
At rest

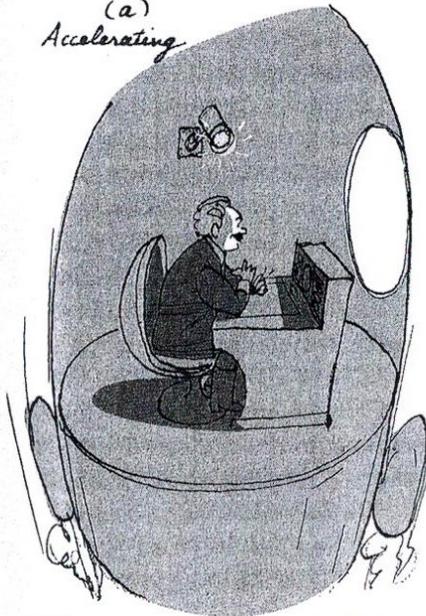


(b)
Accelerating

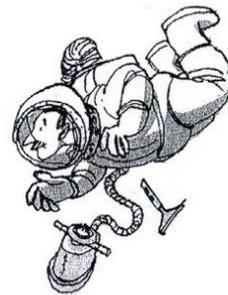


(II) In Outer Space

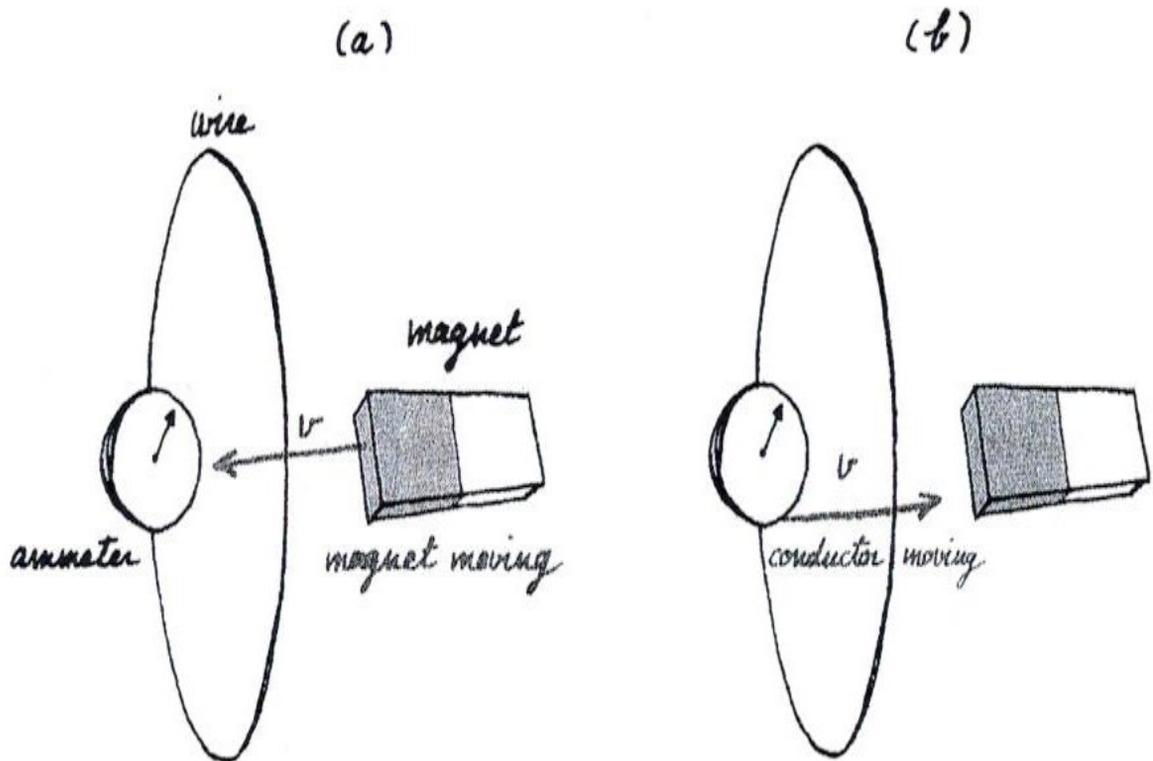
(a)
Accelerating



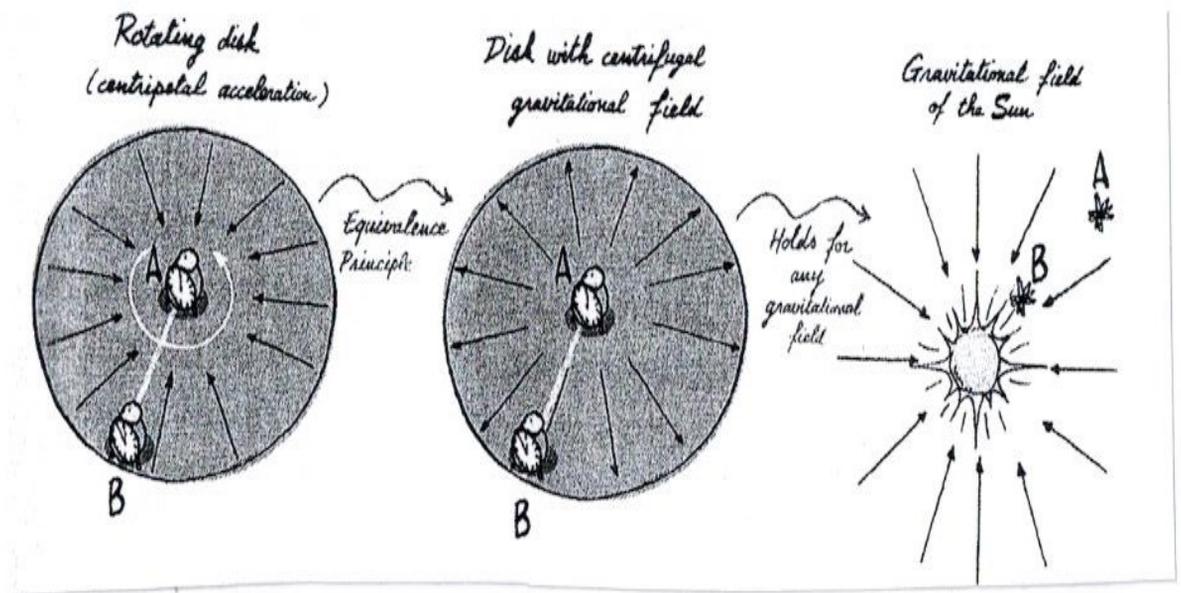
(b)
At rest



Inerzia/Gravità – Campo Elettrico/ Magnetico.



Sistemi ruotanti.

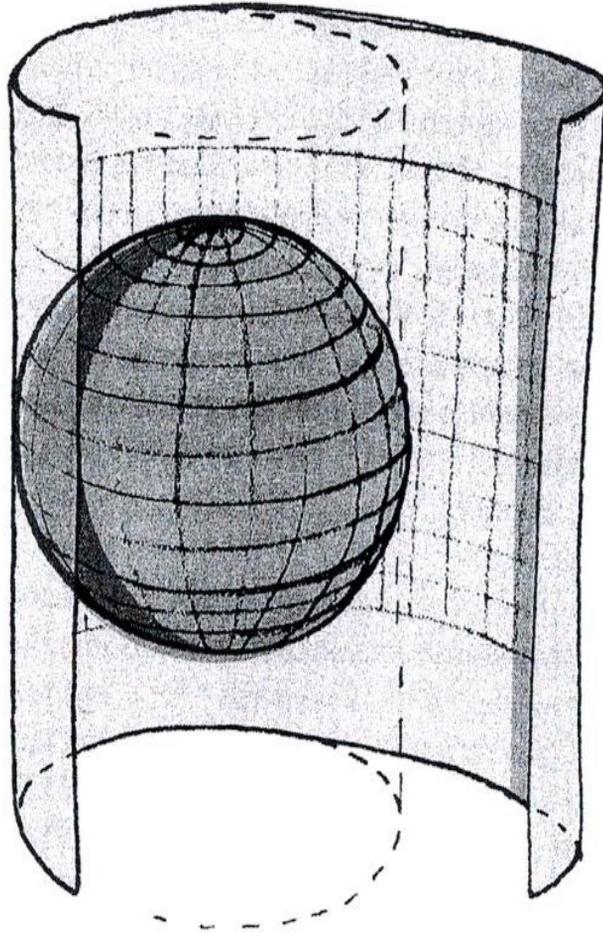


Implicazioni.

- 1) **Deviazione dei raggi luminosi** nei campi gravitazionali.
- 2) Relazione tra **geometria non-euclidea** e gravitazione. Questo risulta anche dal principio di equivalenza per distinti punti di un campo gravitazionale non-uniforme - i.e. trasformazioni di coordinate tra (a) and (b). Importanza **dell'accelerazione relativa - deviazione geodetica**. Applicazione del "flatness theorem": localmente ogni varietà (differenziabile) curva è approssimata da uno spazio piatto tangente.
- 3) **Il redshift gravitazionale.**

La metrica.

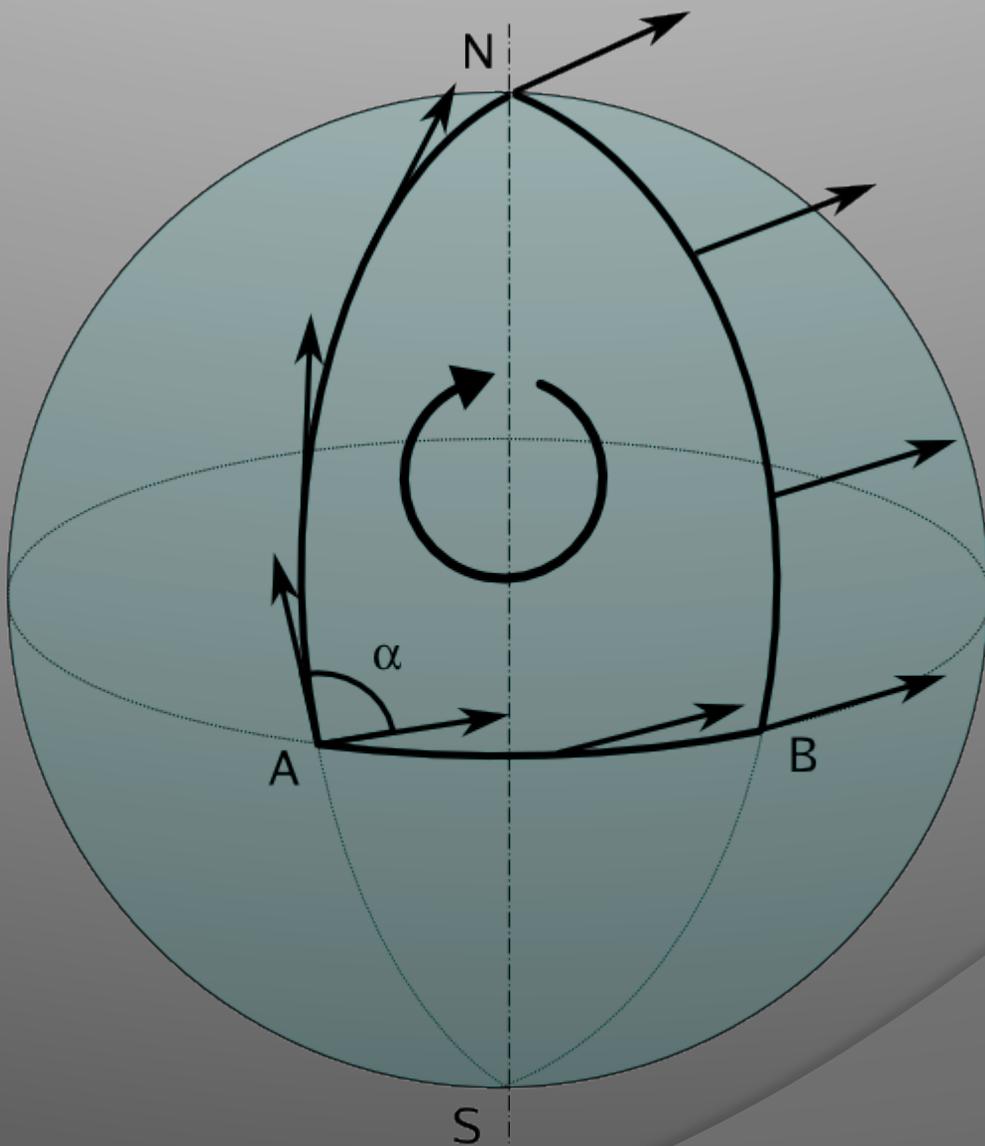
$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx^i dx^j$$



Verso la Covarianza Generale.

- Analogia elettromagnetica: campo elettrico = gradiente di un potenziale – campo gravitazionale = **gradiente della metrica** – questo è stato espresso nella “*Entwurf* theory” di Einstein (1912-1913) – questa teoria non è generalmente covariante
- Successivamente, Einstein considerò i **simboli di Christoffel** (= combinazioni di gradienti della metrica) come rappresentazione del campo gravitazionale. In termini moderni, **l’accelerazione relativa** tra particelle in moto - **legata al tensore di curvatura di Riemann** – dimostra senza ambiguità la presenza di un campo gravitazionale - a traverso una geometria di spazio-tempo curva.

Trasporto parallelo- Curvatura



Il tensore di curvatura di Riemann

$$\begin{aligned}\Gamma^m_{ij} &= g^{mk} \Gamma_{kij} \\ &= \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})\end{aligned}$$

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

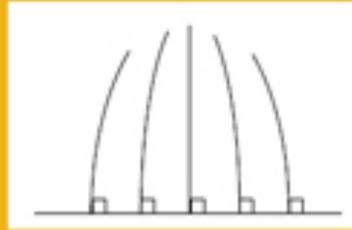
$$R_{ij} = R^{\ell}_{ilj} = g^{\ell m} R_{iljm} = g^{\ell m} R_{limj} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{\ell}} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{il}}{\partial x^j} + \Gamma^{\ell}_{ij} \Gamma^m_{\ell m} - \Gamma^m_{il} \Gamma^{\ell}_{jm}$$

Accelerazione relativa/ Deviazione geodetica.

Desvio geodésico



Curvatura nula



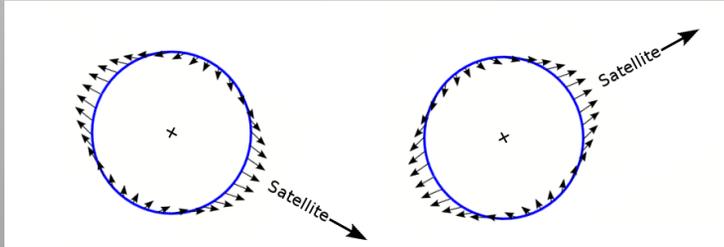
Curvatura positiva



Curvatura negativa



Il tensore di curvatura di Weyl



$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}R g_{a[c}g_{d]b}$$

$$E_{ab} = C_{ambn} n^m n^n .$$

$$H_{ab} := {}^*C_{ambn} n^m n^n$$

$${}^*C_{ambn} := \varepsilon_{ampq} C^{pq}{}_{bn} .$$

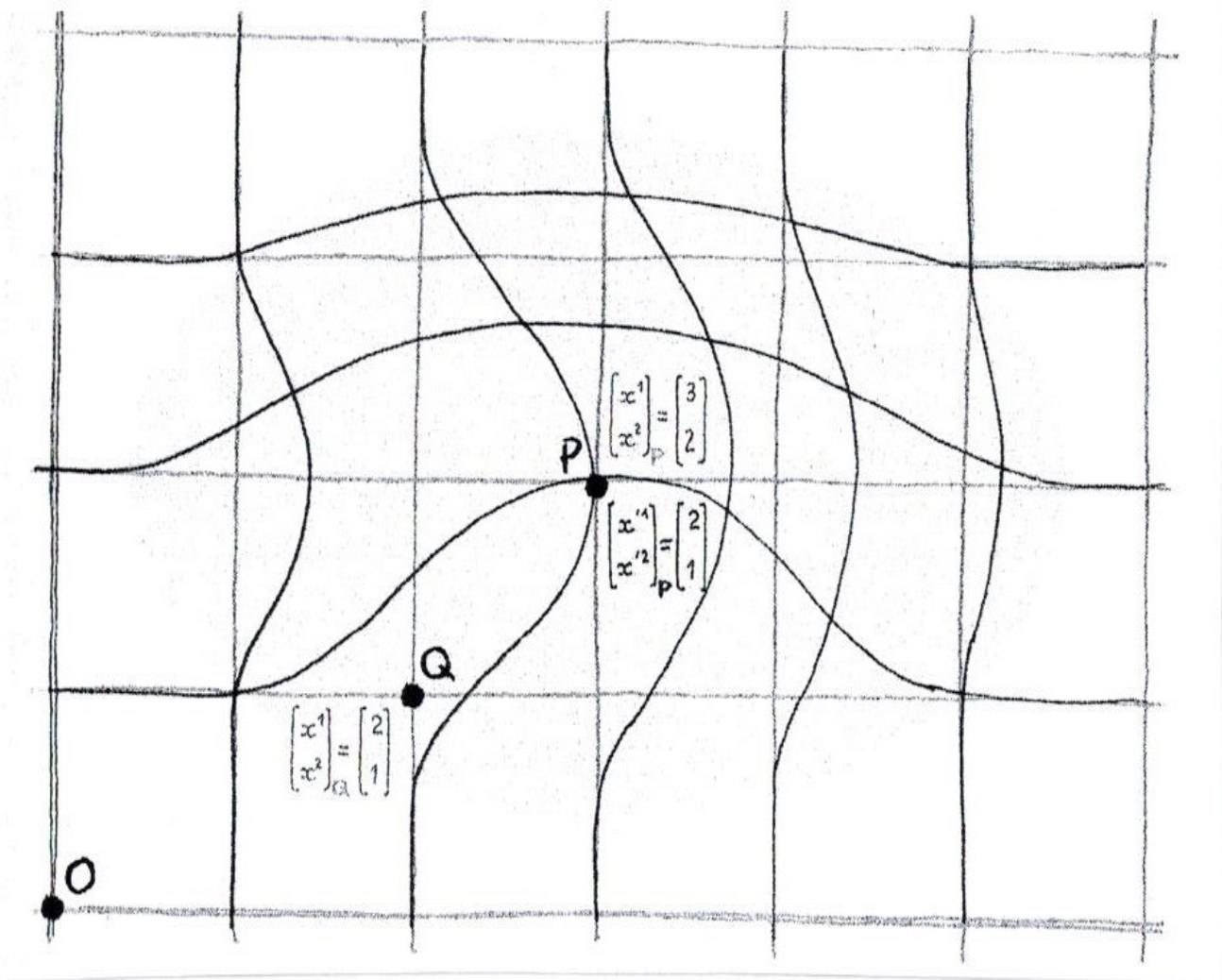
$$\nabla^\rho C_{\rho\sigma\mu\nu} = -2 \frac{(n-3)}{(n-2)} \left(\nabla_{[\mu} R_{\nu]\sigma} + \frac{1}{2(n-1)} g_{\sigma[\nu} \nabla_{\mu]} R \right) .$$

$$\partial_a F^{a\beta} = \mu_0 J^\beta$$

Problemi della Entwurf theory.

- ⊙ **No covarianza generale:** Einstein ideò il **hole argument** per dimostrare che una teoria generalmente covariante non è completamente deterministica r.a. la geometria dello spazio-tempo. Quando le equazioni generalmente covarianti furono trovate, il **point coincidence argument** di Einstein invalida il hole argument.
- ⊙ Un campo statico uniforme (equivalente ad una accelerazione di Born lineare) è una soluzione nel vacuo di una delle prime versioni delle equazioni, però vi è violazione della conservazione dell'energia – addizione di termini dovuto all'energia del campo gravitazionale implica **solo localmente il principio di equivalenza.**

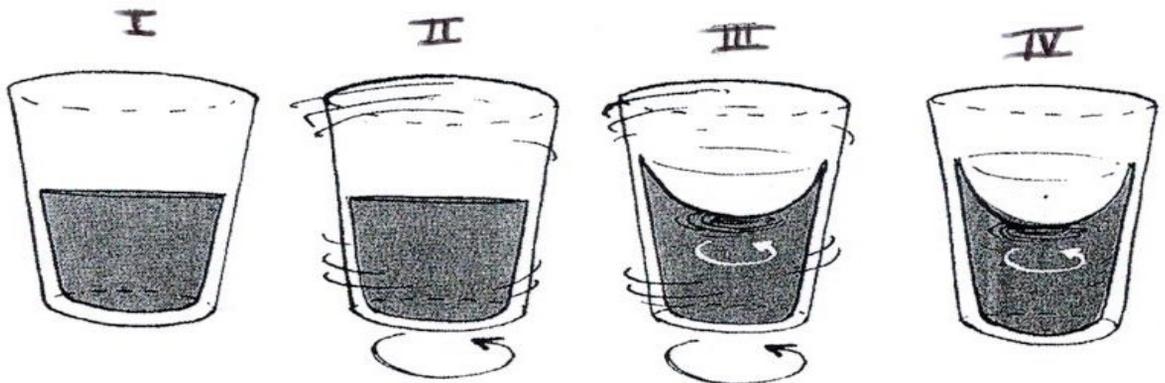
II “hole argument”



Moto lineare accelerato assoluto ?

- 1) Il **principio d'equivalenza** per il moto linearmente accelerato **vale solo localmente** per semplici distribuzioni di materia.
- 2) Qualsiasi campo gravitazionale dev'essere associato ad una distribuzione di materia – **principio di Mach: per la RG esso non vale.**
- 3) La covarianza generale è necessaria ma **non è sufficiente**: Erich Kretschmann (1917):
geometricamente, il moto dell'osservatore (b) è geodetico, mentre il moto di (a) è non-geodetico. Nella RS, le LF trasformano l'insieme dei sistemi inerziali in se stesso: le LF sono una simmetria. Questo non vale per le trasformazioni generali della RG.

The relativity of rotation.



bucket
water
relative
rotation

at rest

at rest

NO

rotating

at rest

YES

rotating

rotating

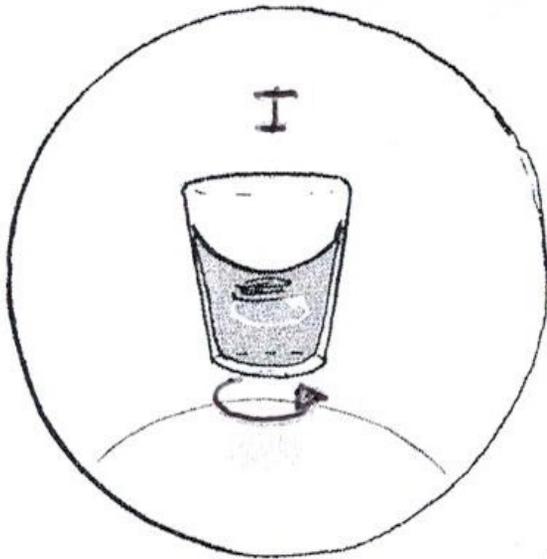
NO

at rest

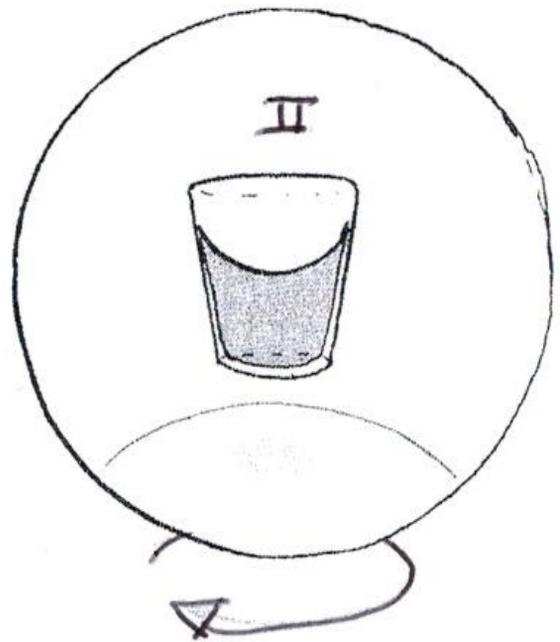
rotating

YES

Il principio di Mach.



*bucket and water rotating
shell and earth at rest*



*bucket and water at rest
shell and earth rotating*

L'importanza delle condizioni ai limiti.

- Il campo metrico in I e II nelle coordinate di un osservatore in quiete rispetto alla shell o rispetto al secchio: entrambe sono soluzioni nel vuoto.
- La metrica ruotante vicino al centro corrisponde al campo metrico generato da una shell ruotante nella RG ? No - Einstein considerò **condizioni al limite** Minkowskiane all'infinito.
- Per un osservatore in quiete r.a. secchio, in I il campo metrico equivalente all'infinito tende all'infinito, mentre in II la metrica rimane finita all'infinito.

Frame dragging.

- 1) Corrispondenza tra Einstein and Hans Thirring nel 1917. Thirring calcola il campo metrico all'interno di una shell sferica ruotante – **usa condizioni al limite diverse.**
- 2) Thirring (Lense and Thirring nel 1918) studia effetti di una sfera ruotante all'esterno della sfera: **frame dragging.** Aprile 2004, Gravity Probe B della NASA lanciato – con particolari giroscopi – **piena conferma delle predizioni della RG.**
- 3) La questione della relatività della rotazione è stata considerata da O. Gron nel 2010: **perfect inertial dragging**

Eliminando le condizioni ai limiti – la costante cosmologica.

- Attraverso la corrispondenza con De Sitter (ca1916) Albert Einstein cerca una soluzione statica, chiusa (spazialmente finita) come modello di universo, ma deve aggiungere il termine cosmologico costante nelle sue equazioni di campo.
- La soluzione (non-statica) di De Sitter è una soluzione nel vuoto, **il principio di Mach non vale.**

Le Equazioni di Campo di Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}$$

Ricchezza e varietà della dinamica delle soluzioni spazio-temporali.

- 1) **Omogenee e isotrope** : spazi FLRW , universo di De Sitter.
- 2) **Omogenee e anisotrope** – **caoticità complessità = spazi semplici + onde gravitazionali sovrapposte.**
- 3) **Spazi-tempi disomogenei** – nel caso più generale **singularità iniziale caotica (turbolente ?)**
- 4) Esistenza di **onde gravitazionali pane esatte** – ruolo importante per stati asintotici futuri di soluzioni generali, non esistono superfici di Cauchy, sono soluzione delle equazioni supersimmetriche, le correzioni quantum sono nulle, etc
...

Conferme sperimentali/ osservative della Relatività Generale

- 1) L'esperimento Pound-Rebka per il **redshift gravitazionale**.
- 2) **La precessione del perielio** di Mercurio.
- 3) **Deviazione dei raggi luminosi** durante eclisse solare, **lensing gravitazionale**.
- 4) **Frame dragging** by earth through the Gravity Probe B experiment
- 6) Pulsar binario – Hulse and Taylor – **evidenza indiretta per le onde gravitazionali**.