Lemma 3 Per ogni A_1, A_2 se $A_1 \Downarrow_s n_1$ e $A_2\{A_1/x\} \Downarrow_s n_2$ allora $A_2\{n_1/x\} \Downarrow_s n_2$. (1)

Proof La prova è per induzione sulla profondità (rule induction) della derivazione $A_2\{A_1/x\} \Downarrow_s n_2$. Analizziamo quali sono le possibili regole di inferenza utilizzate per ultime per la costruzione dell'albero di derivazione.

__Caso Base__: Ultima regola applicata è l'assioma $\dfrac{}{n \Downarrow_s n}$.
Questo vorrebbe dire che $A_2 = n$ e
$A_2\{A_1/x\} = A_2\{n_1/x\} = n \Downarrow_s n$.

__Caso Induttivo 1__: Regola della somma. Da fare per esercizio.

__Caso Induttivo 2__: Sia (let-strict) l'ultima regola di inferenza usata per la derivazione del giudizio $A_2\{A_1/x\} \Downarrow_s n_2$. Questo vuol dire che $A_2\{A_1/x\}$ sarà un programma di tipo let, e quindi anche A_2. Sia allora $A_2 \stackrel{def}{=} \text{let } y = A_3 \text{ in } A_4$, per qualche y, A_3 e A_4. Ci sono due casi possibili:

1) $y \neq x$

In questo caso, $A_2\{A_1/x\} = (\text{let } y = A_3\{A_1/x\} \text{ in } A_4\{A_1/x\}) \Downarrow_s n_2$.

Per definizione della regole semantica (let-strict) ciò è possibile solo se: ②

- $A_3\{^{A_1}/_x\} \Downarrow_S n_3$, per qualche n_3
- $(A_4\{^{A_1}/_x\})\{^{n_3}/_y\} \Downarrow_S n_2$.

Ovvero:

$$\frac{A_3\{^{A_1}/_x\} \Downarrow_S n_3 \qquad (A_4\{^{A_1}/_x\})\{^{n_3}/_y\} \Downarrow_S n_2}{A_2\{^{A_1}/_x\} \equiv (\mathrm{let}\ y = A_3\{^{A_1}/_x\}\ \mathrm{in}\ A_4\{^{A_1}/_x\}) \Downarrow_S n_2.}$$

Siccome l'albero di derivazione di $A_3\{^{A_1}/_x\} \Downarrow_S n_3$ è meno profondo di quello di $A_2\{^{A_1}/_x\} \Downarrow_S n_2$, per ipotesi induttiva possiamo concludere che $A_3\{^{n_1}/_x\} \Downarrow_S n_3$.
Si noti che:

$$A_2\{^{n_1}/_x\} \overset{def}{=} \mathrm{let}\ y = A_3\{^{n_1}/_x\}\ \mathrm{in}\ A_4\{^{n_1}/_x\}.$$

Inoltre anche l'albero di derivazione di $(A_4\{^{A_1}/_x\})\{^{n_3}/_y\} \Downarrow_S n_2$ ha profondità inferiore rispetto a $A_2\{^{A_1}/_x\}$. Dal fatto che $x \neq y$ deriva che $(A_4\{^{A_1}/_x\})(^{n_3}/_y) = (A_4\{^{n_3}/_y\})\{^{A_1}/_x\}$. Per ipotesi induttiva ne deriva che $(A_4\{^{n_3}/_y\})\{^{n_1}/_x\} \Downarrow_S n_2$. Riprendendo le sostituzioni:

$(A_4\{^{m_1}/_x\})\{^{m_3}/_y\} \Downarrow_s m_2$.

A questo punto possiamo applicare la regola (let-strict) per derivare che:

$$A_2\{^{m_1}/_x\} = (\text{let } y = A_3\{^{m_1}/_x\} \text{ in } A_4\{^{m_1}/_x\}) \Downarrow_s m_2 \,\square$$

2) L'altro caso è quando $y = x$. In tal caso:

$A_2\{^{A_1}/_x\} \stackrel{def}{=} (\text{let } x = A_3\{^{A_1}/_x\} \text{ in } A_4) \Downarrow_s m_2$. Per definizione della regola (let-strict) ciò è possibile solo se:

- $A_3\{^{A_1}/_x\} \Downarrow_s m_3$, per qualche m_3
- $A_4\{^{m_3}/_x\} \Downarrow_s m_2$.

Per ipotesi induttiva (similmente al caso precedente) deriviamo che $A_3\{^{m_1}/_x\} \Downarrow_s m_3$.

Questo è sufficiente per applicare la regola (let-strict) una volta ancora e derivare $A_2\{^{m_1}/_x\} \Downarrow_s m_2$

$\square$