

Oggi parleremo di... Coppie Stabili

Un altro esempio di

- astrazione di un problema reale in un problema computazionale (relazione input-output ben definita)
- analisi di un algoritmo
 - correttezza - terminazione
 - struttura della soluzione
 - ...
 - ci sarà da lavorare un pò più di ieri
- qualche osservazione implementativa
 - relazione tra strutture dati e algoritmi

1

Internship Problem: Associare studenti di medicina ad ospedali

Goal. Dato un insieme di preferenze tra ospedali e studenti di medicina, progettare un sistema di ammissioni che sia robusto (self-reinforcing)

Coppia instabile: studente x ed ospedale y sono **instabili** se:

- x preferisce y all'ospedale assegnatogli.
- y preferisce x ad uno degli studenti già accettati.

Assegnamento stabile. Assegnamento senza coppie instabili.

- Condizione naturale e desiderabile.
- Interesse individuale previene accordi "sotto-banco" tra ospedali e studenti.



2

Stable matching problem

Goal. Dato un insieme di n uomini e un insieme di n donne, trova un accoppiamento "adatto".

- I partecipanti classificano i membri dell'altro sesso.
- Ogni uomo elenca le donne in ordine di preferenza dalla migliore alla peggiore (secondo lui).
- Ogni donna classifica gli uomini dal migliore al peggiore (secondo lei).

	favorita ↓ 1 st	2 nd	meno favorita ↓ 3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

preferenze degli uomini

	favorito ↓ 1 st	2 nd	meno favorito ↓ 3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

preferenze delle donne

3

Perfect matching

Def. Un **matching** S è un insieme di coppie ordinate $m-w$ con $m \in M$ e $w \in W$ tale che (t.c.)

- Ogni uomo $m \in M$ appare in al massimo una coppia di S .
- Ogni donna $w \in W$ appare in al massimo una coppia di S .

Def. Un matching S è **perfetto** (perfect matching) se $|S| = |M| = |W| = n$.

	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

un perfect matching $S = \{ X-C, Y-B, Z-A \}$

4

Coppie instabili

Def. Dato un perfect matching S , un uomo m e una donna w sono **instabili** se:

- m preferisce w alla sua partner attuale.
- w preferisce m al suo partner attuale.

Key point. $m-w$ coppia instabile: m e w possono entrambi migliorare il proprio *ménage*, mollando gli attuali partner e mettendosi insieme.

	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Bertha e Xavier sono una coppia instabile

5

Stable matching problem

Def. Uno **stable matching** è un perfect matching senza coppie instabili.

Stable matching problem. Date le liste delle preferenze di n uomini e n donne, trovare uno stable matching (se ne esiste almeno uno).

- Condizione naturale, desiderabile, e robusta (self-reinforcing).
- L'interesse individuale evita che un uomo e una donna già impegnati *scappino insieme*.

	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

un perfect matching $S = \{ X-A, Y-B, Z-C \}$

6

Stable roommate problem

Q. Esiste sempre uno stable matching?

A. Non è ovvio a priori.

Variante: **Stable roommate problem.**

- $2n$ persone; ogni persona classifica gli altri da 1 a $2n-1$.
- Si scelgano coppie di compagni di stanza evitando coppie instabili.

	1 st	2 nd	3 rd
Adam	B	C	D
Bob	C	A	D
Chris	A	B	D
Doofus	A	B	C

nessun perfect matching è stabile

$A-B, C-D \Rightarrow B-C$ instabile

$A-C, B-D \Rightarrow A-B$ instabile

$A-D, B-C \Rightarrow A-C$ instabile

Quindi. uno stable matching non esiste sempre per lo stable roommate problem.

7

Algoritmo di Gale-Shapley (proposte e rifiuti)

Un metodo intuitivo ...ma **garantisce** che troveremo uno stable matching ?

GALE-SHAPLEY (preference lists for men and women)

INITIALIZE S to empty matching. All m

WHILE (some man m is unmatched and hasn't proposed to every woman)

$w \leftarrow$ first woman on m 's list to whom m has not yet proposed.

IF (w is unmatched)

Add pair $m-w$ to matching S .

ELSE IF (w prefers m to her current partner m')

Remove pair $m'-w$ from matching S .

Add pair $m-w$ to matching S .

ELSE

w rejects m . (m remains unmatched)

RETURN S .

8

Prova di correttezza: l'algoritmo termina (non cicla all'infinito)

Osservazione 1. Gli uomini chiedono alle donne in ordine decrescente di preferenza (dalla preferita alla meno preferita).

Observation 2. Una volta accettato un uomo, una donna non diventa mai più libera; può solo migliorare partner, mollando il proprio partner per uno più alto nella sua lista

Lemma. L'Algoritmo termina dopo al più n^2 iterazioni del loop while.

Dim. In ogni iterazione un uomo si propone ad una donna cui non si era proposto prima. Ci sono n^2 possibili proposte diverse. ■

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th		1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th
Victor	A	B	C	D	E	Amy	W	X	Y	Z	V
Wyatt	B	C	D	A	E	Bertha	X	Y	Z	V	W
Xavier	C	D	A	B	E	Clare	Y	Z	V	W	X
Yancey	D	A	B	C	E	Diane	Z	V	W	X	Y
Zeus	A	B	C	D	E	Erika	V	W	X	Y	Z

Un'istanza in cui $n(n-1) + 1$ proposte sono necessarie

9

Prova di correttezza: perfezione (il matching è perfect)

Lemma. Nel matching fornito da Gale-Shapley, tutti gli uomini e tutte le donne sono accoppiati (nessuno rimane unmatched o libero).

Dim. [per assurdo o contraddizione]

- Supponiamo, per assurdo, che Zeus rimanga libero dopo la terminazione dell'algoritmo di Gale Shapley.
- Allora anche una donna, es. Amy, rimane libera alla terminazione.
- Per Osservazione 2 (una donna dopo il primo sì non ridiventa libera), Amy **non ha mai ricevuto una proposta**.
- Ma, Zeus **deve essersi proposto a tutte**, altrimenti l'algoritmo non sarebbe terminato. ■

10

Prova di correttezza: stabilità

Lemma. Il matching di Gale-Shapley non presenta coppie instabili.

Dim. Supponiamo che il matching S^* di GS non contiene la coppia $A-Z$.

- Caso 1: Z non si è mai proposto ad A .

⇒ Z preferisce la sua partner B (in S^*) ad A . ← uomini si propongono alle donne in ordine decrescente di preference

⇒ $A-Z$ è stabile.

- Caso 2: Z si è proposto ad A .

⇒ A ha rifiutato Z (subito o l'ha mollato poi)

⇒ A preferisce il suo partner Y to Z . ← le donne migliorano solo

⇒ $A-Z$ è stabile.

- In entrambi i casi, la coppia $A-Z$ è stabile. ■

Gale-Shapley matching S^*

$A - Y$
 $B - Z$
 \vdots

11

Cosa possiamo concludere...

Stable matching problem. Dati n uomini e n donne, e le loro preferenze, trovare uno stable matching se ne esiste uno.

Teorema. [Gale-Shapley 1962] L'algoritmo di Gale-Shapley trova uno stable matching per ogni istanza del problema.

Q. Come possiamo implementare l'algoritmo GS efficientemente?

Q. Se un'istanza ammette più di uno stable matching, quale viene dato in output dall'algoritmo GS?

12

Analizziamo la soluzione data da GS

Per una data istanza, possono esistere diversi stable matchings.

- Quale soluzione viene selezionata dall'algoritmo GS?
- Esiste un'unica soluzione che GS può fornire, tra quelle possibili?
- Se sì, possiamo caratterizzarla?

	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

un'istanza con due stable matching: $M = \{A-X, B-Y, C-Z\}$ e $M' = \{A-Y, B-X, C-Z\}$

13

Analizziamo la soluzione data da GS

Def. Una donna w è una **partner valida** per un uomo m se esiste uno stable matching in cui m e w sono una coppia.

Esempio

- Sia Amy che Bertha sono *partner valide* per Xavier.
- Sia Amy che Bertha sono *partner valide* per Yancey.
- Clare è l'unica *partner valida* per Zeus.

	1 st	2 nd	3 rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

	1 st	2 nd	3 rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

un'istanza con due stable matching: $M = \{A-X, B-Y, C-Z\}$ and $M' = \{A-Y, B-X, C-Z\}$

14

Analizziamo la soluzione data da GS

Def. Una donna w è una **partner valida** per un uomo m se esiste uno stable matching in cui m e w sono una coppia.

Assegnamento uomo-ottimale. Ogni uomo riceve la migliore tra le partner valide.

- E' un perfect matching?
- E' stabile?

Lemma. Ogni esecuzione di GS fornisce un assegnamento **uomo-ottimale**.

Corollario. Un assegnamento uomo-ottimale è uno stable matching!

15

E per le donne? Come si comporta l'algoritmo di GS

Q. L' uomo-ottimalità è a discapito delle donne?

A. Sì.

Assegnamento misogino. Ogni donna riceve il peggior partner valido.

Lemma. GS produce uno stable matching S^* **misogino**.

16

Stable matching - conclusioni

Stable matching problem. Date le liste di preferenza di n uomini e n donne, trova uno **stable matching**.

nessuna non-coppia uomo-donna preferirebbe
l'altro piuttosto che il partner assegnato

Algoritmo di Gale-Shapley. Trova uno stable matching con circa n^2 operazioni.

Uomo-ottimalità. Ogni uomo finisce in coppia con la migliore partner **valida**.

w è una partner valida per m
se esiste qualche
stable matching
in cui m e w fanno coppia

Tiriamo le somme

Abbiamo visto un altro esempio di come...

- analizzare la struttura e le sfaccettature di un problema.
- progettare, verificare algoritmi (efficienti).

- Cosa succede (in GS) se sono le donne a proporsi?
- Cosa succede se nella lista di preferenze è possibile indicare che alcuni partner sono improponibili (si preferisce non far coppia con alcuno piuttosto che con loro)