

# Progetto Lauree Scientifiche: Dinamica di Popolazioni

Marco Caliari e Simone Zuccher

Liceo Scientifico Statale “E. Medi”, Villafranca di Verona  
a.s. 2015/2016

## Indice

<b>1</b>	<b>Modello matematico</b>	<b>2</b>
1.1	Struttura di un modello . . . . .	2
1.2	Dipendenza dai dati iniziali . . . . .	2
1.3	Sistema dinamico . . . . .	3
1.4	Sugli scacchi e la crescita esponenziale . . . . .	5
1.5	Popolazione italiana . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Il modello di Malthus</b>	<b>7</b>
2.1	Solo nuovi nati . . . . .	7
2.2	Nuovi nati e morti . . . . .	8
2.3	Nuovi nati, morti e migrazioni . . . . .	9
2.4	Possibili complicazioni . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Il modello logistico</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Dinamica di epidemie: il modello SIR</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Interazione tra due popolazioni (parte facoltativa)</b>	<b>21</b>
<b>A</b>	<b>Calcolo di pi greco</b>	<b>24</b>

# 1 Modello matematico

Un modello matematico è un modello costruito usando il linguaggio e gli strumenti della matematica. Come tutti gli altri modelli usati nella scienza, il suo scopo è quello di rappresentare il più possibile fedelmente un determinato oggetto o fenomeno reale.

Tutti i settori della scienza fanno largo uso di modelli matematici per descrivere determinati aspetti del mondo reale. Gli strumenti matematici usati possono essere i più disparati.

## 1.1 Struttura di un modello

Un modello matematico è spesso costruito con lo scopo di fornire previsioni. Generalmente, il modello descrive la probabile evoluzione di un fenomeno sulla base di dati iniziali forniti dall'utente (*input*) e restituisce dei dati finali (*output*). L'efficacia del modello può quindi essere misurata comparando i dati finali con il risultato effettivo dell'evoluzione del fenomeno. Ad esempio, modelli matematici vengono continuamente proposti e testati in meteorologia o in economia.

## 1.2 Dipendenza dai dati iniziali

Un aspetto cruciale, che incide notevolmente sulla capacità di previsione di un modello matematico, è la dipendenza dai dati iniziali. Se una piccola variazione dell'input produce una forte variazione dell'output, la creazione di un modello efficiente risulta essere enormemente più complessa, e le previsioni a lungo termine possono risultare intrinsecamente impossibili. Un fenomeno con forte dipendenza dai dati iniziali, riassunto nel concetto di effetto farfalla, è detto *caotico*. La scienza che studia questi fenomeni è la teoria del caos. In un sistema di questo tipo, l'errore della previsione cresce esponenzialmente nel tempo.

Ad esempio, i fenomeni meteorologici sono generalmente caotici: per questo motivo, una previsione a lungo termine (ad esempio, la temperatura in una data città fra un anno) è impossibile. I pianeti del sistema solare si muovono invece in modo non caotico: per questo motivo è possibile prevedere eclissi con secoli d'anticipo. In sistemi non caotici, l'errore della previsione cresce generalmente in modo lineare nel tempo, o al più polinomiale.

### 1.3 Sistema dinamico

Nella fisica matematica contemporanea il concetto di *sistema dinamico* nasce dall'esigenza di costruire un modello generale in grado di descrivere tutti i sistemi che evolvono nel tempo secondo opportune leggi che legano lo *stato* presente a quelli futuri. Il concetto di stato è difficile da definire in maniera generale a causa dell'enorme varietà di forme che può assumere: si tratta in sostanza di una descrizione del sistema sufficientemente esauriente. Un sistema dinamico è definito da

- uno spazio delle fasi, ossia un insieme i cui elementi rappresentano tutti gli stati possibili che il sistema può assumere;
- un insieme di *tempi*: può essere un insieme *continuo* o uno *discreto*, a seconda del modello adottato. Il tempo rappresenta qui semplicemente un parametro al variare del quale il sistema descrive una traiettoria nello spazio delle fasi, e proprio da questa definizione prende l'appellativo *dinamico*;
- una *evoluzione*: il cambiamento degli stati del sistema al variare del tempo viene rappresentato da un insieme di funzioni dello spazio delle fasi in sé stesso. Esse vengono chiamate *funzioni di transizione* in quanto trasformano lo stato che si osserva all'istante iniziale in quello che il sistema assumerà dopo un certo tempo.

Facciamo un esempio di sistema dinamico molto semplice, così da introdurre anche la notazione che useremo in seguito. Consideriamo una colonia di batteri che si riproducono per *scissione* binaria. Siamo interessati a studiare il numero di individui della colonia ad un certo istante, sapendo che ogni batterio si divide in due dopo 20 minuti dalla sua creazione. Per poter scrivere un modello, dobbiamo fare *almeno* queste ipotesi/semplificazioni (DOMANDA):

- Supponiamo di conoscere il numero di individui nell'istante in cui iniziamo l'osservazione.
- Supponiamo che tutti gli individui siano "sincronizzati", cioè comincino tutti a scindersi dopo 20 minuti (ed esattamente dopo 20 minuti).
- La velocità di riproduzione dipende, per esempio, dalla temperatura, dall'umidità, dal PH, dalla quantità di ossigeno presente, ecc. Supponiamo che tutto ciò che influenza la velocità di riproduzione dei batteri rimanga costante nel tempo.

- Supponiamo che i batteri siano “immortali”, almeno (!) nel periodo di osservazione.
- Supponiamo che tutti i batteri rimangano nello spazio di osservazione.
- Supponiamo che tutte le scissioni avvengano senza mutazioni tali da alterare il ciclo vitale dei nuovi individui.
- ...

Con tutte queste ipotesi, se indichiamo con  $x_1$  il numero di individui nell'istante in cui iniziamo l'osservazione, dopo 20 minuti il numero di individui sarà  $2x_1$ , dopo altri 20 minuti  $4x_1$  e così via. Allora lo spazio delle fasi è

$$\{x_1, 2x_1, 4x_1, 8x_1, \dots\}$$

Per quanto riguarda l'insieme dei tempi, ci sono diverse possibilità. Possiamo prendere come istante iniziale  $t_1$  il tempo (in minuti) trascorso tra il Big Bang e l'istante in cui iniziamo l'osservazione: al tempo  $t_2 = t_1 + 20$  si ha la prima scissione, al tempo  $t_3 = t_2 + 20$  la seconda e così via. Al tempo  $t_5 + 10.5$ ... mancano nove minuti e mezzo alla quinta scissione. Con questa scelta, l'insieme dei tempi è

$$\{t: t \geq t_1\}$$

Una scelta più sensata è quella discreta, in cui si fissa l'istante iniziale a zero:

$$\{t_1, t_2, t_3, \dots\} = \{0, 20, 40, \dots\}$$

A questo punto, risulta conveniente definire  $x_2$  come il numero di individui all'istante  $t_2$ : si ha allora  $x_2 = 2x_1$ . E  $x_3$  il numero di individui all'istante  $t_3$ : quindi  $x_3 = 2x_2 = 4x_1$ . In generale, si ha

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad n \geq 1 \tag{1}$$

ove  $x_n$  è il numero di individui all'istante  $t_n$ .

Infine, qual è l'evoluzione? Al tempo  $t_{i+1}$  si è passati da  $x_1$  individui a  $x_{i+1} = 2x_i = 4x_{i-1} = \dots = 2^i x_1$  individui. Dunque la funzione che trasforma lo stato iniziale  $x_1$  nello stato  $x_i$  è

$$\varphi_{t_i}: x_1 \rightarrow 2^{i-1} x_1$$

Una crescita di popolazione di questo tipo è detta *crescita esponenziale* (termine di cui spesso si abusa). In questo caso, la base (costante) dell'esponenziale è maggiore di uno e quindi si ha una crescita vera e propria. Nel caso in cui la base sia uguale a uno, il numero di individui rimarrebbe costante. Infine, nel caso in cui la base sia minore di uno, il numero di individui decrescerebbe fino a zero. In ogni caso, si potrebbe parlare di *andamento esponenziale*.

## 1.4 Sugli scacchi e la crescita esponenziale

Il gioco degli scacchi è uno dei più antichi del mondo, per quanto non si sappia con precisione chi l'abbia inventato: si presume i cinesi, alcune migliaia di anni fa, o forse gli indiani. Lentamente, con il progredire delle relazioni commerciali, si diffuse in altre regioni e specialmente in Persia, dove divenne ben presto popolare. Il gioco arrivò in seguito in Egitto, portato da un ambasciatore persiano che volle insegnarlo anche al Faraone. Questi, entusiasta del gioco, al termine della partita, per testimoniare la propria gratitudine, invitò l'ambasciatore ad esprimere un desiderio qualsiasi che sarebbe stato senz'altro esaudito. L'interpellato rispose che voleva del grano: un chicco sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro sulla terza e così continuando e raddoppiando, fino alla sessantaquattresima casella. “Una cosa da nulla” — proclamò il Faraone, stupito che la richiesta fosse così misera, e diede ordine al Gran Tesoriere di provvedere. Dopo oltre una settimana il funzionario, che nel frattempo aveva tentato di fare i conti, si presentò dicendo: “Maestà, per pagare l'ambasciatore non solo non è sufficiente il raccolto annuale dell'Egitto, non lo è neppure quello del mondo intero, e neppure i raccolti di dieci anni di tutto il mondo sono sufficienti”.

Il numero di chicchi che il Faraone avrebbe dovuto dare all'ambasciatore persiano è il seguente:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

ossia più di 18 miliardi di miliardi di chicchi!

Per renderci conto di quanto grande sia questo numero, ricordiamo che la produzione mondiale di grano prevista per il 2009/2010 (vedi [1]) è di 656 milioni di tonnellate (ai tempi dei faraoni era molto meno...). Per difetto assumiamo che ci vogliano 10 chicchi per fare un grammo e che il numero di chicchi sulla scacchiera sia 18 miliardi di miliardi. Allora, il peso dei chicchi che il Faraone avrebbe dovuto consegnare all'ambasciatore persiano vale 1.8 miliardi di miliardi di grammi, ossia 1 800 000 milioni di tonnellate, vale a dire la produzione mondiale di grano di più di 2644 anni!

L'ambasciatore potrebbe essere stato un po' più modesto e chiedere solo i chicchi di grano presenti sull'ultima casella della scacchiera, cioè  $2^{63}$ . Osserviamo che (EXCEL)

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \quad (2)$$

e, ponendo  $n = 62$ , scopriamo che il numero di chicchi presenti sull'ultima casella è circa uguale al numero di chicchi presenti su tutte le altre e dunque la metà circa del numero totale di chicchi. In tal caso, sarebbero “bastati” 1322 anni di raccolto odierno.

## 1.5 Popolazione italiana

Consideriamo l'andamento della popolazione italiana nell'anno 2008. Dal sito dell'ISTAT [2] ricaviamo, tra le altre, le seguenti informazioni:

Popolazione al primo gennaio	59 619 290
Nati	576 659
Morti	585 126
Saldo migratorio e per altri motivi	434 245
Popolazione al 31 dicembre	60 045 068

Tabella 1: Bilancio demografico anno 2008. Dati ISTAT.

Il cosiddetto “saldo naturale” è di  $-8\,467$  e l'aumento della popolazione è dovuto al saldo migratorio. Il numero di nuovi nati è pari circa al 9.67 per mille della popolazione iniziale e il numero di morti è pari circa al 9.81 per mille della popolazione iniziale. Ha senso esprimerli come frazione della popolazione? Abbastanza. Per quanto riguarda i nuovi nati, il loro numero dipende dalle coppie che decidono di avere figli. È abbastanza ragionevole pensare che se la popolazione dovesse raddoppiare, così anche il numero di coppie (e di ogni altro stato civile) e dunque il numero di nuovi nati. E lo stesso dicasi per quanto riguarda il numero di morti. Ad ulteriore conferma, guardiamo le percentuali di nuovi nati e morti negli anni scorsi:

Anno	% nati	% morti
2008	0.967	0.981
2007	0.954	0.965
2006	0.953	0.950
2005	0.948	0.970

Tabella 2: Percentuali di nuovi nati e morti negli anni 2005–2008. Dati ISTAT.

Si vede come queste percentuali si mantengano “più o meno” costanti.

Per quanto riguarda il flusso migratorio, invece, non ha molto senso esprimerlo in termini percentuali. Il numero di immigrati non dipende direttamente dalla numerosità della popolazione locale, quanto, piuttosto, da “quote” di immigrazione, decise anno per anno e dipendenti da vari fattori (disponibilità di lavoro *in primis*).

## 2 Il modello di Malthus

Vogliamo scrivere un modello matematico che, a partire dai dati della popolazione italiana nel 2008, possa predire l'andamento negli anni futuri. Abbiamo già capito che un insieme dei tempi conveniente è quello discreto  $\{t_1, t_2, t_3, \dots\} = \{2008, 2009, 2010, \dots\}$ . Indichiamo con  $x_1$  il numero di abitanti in Italia il primo gennaio 2008. Chiameremo poi  $x_2, x_3$ , eccetera il numero di abitanti in Italia il primo gennaio 2009, 2010, eccetera. Come al solito, assumeremo tutte le ipotesi semplificative che ci servono.

### 2.1 Solo nuovi nati

Cominciamo a scrivere il modello tenendo conto solo dei nuovi nati. Per questo, assumeremo essere fisso il *tasso di natalità* che chiameremo  $\tau^{\text{nati}}$ . Dunque, il numero di abitanti nel 2009 (al primo gennaio) è (STUDENTI)

$$x_2 = x_1 + \tau^{\text{nati}}x_1$$

ossia il numero di abitanti nel 2008 più il numero di nuovi nati nel 2008. Ad essere precisi, poiché moltiplichiamo il numero intero  $x_1$  per un numero decimale, dovremmo prendere la parte intera di  $x_2$  (o ammettere che ci siano, per esempio, mezze persone...). Trascureremo questo fatto. Se il tasso di natalità si mantiene costante, possiamo scrivere, in generale, che nell'anno  $2008 + n$  la popolazione è di

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\text{nati}}x_n = (1 + \tau^{\text{nati}})x_n, \quad n \geq 1$$

abitanti.

#### Domande:

1. Usando il tasso attuale, quanto sarà la popolazione il primo gennaio 2020, ipotizzando che ci siano solo nascite e non morti?
2. In che anno si avrà una popolazione superiore a 70 milioni di abitanti, nelle stesse ipotesi?
3. Se si volessero raggiungere i 70 milioni di abitanti il primo gennaio 2020, quale dovrebbe essere il valore del tasso di natalità?

Questa espressione è molto simile a quella in equazione (1). In questo caso, la base dell'esponenziale è di poco maggiore di 1, comunque sufficiente a generare una vera crescita esponenziale della popolazione. Se si vuole conoscere la popolazione nell'anno  $2008 + n$ , basta osservare che

$$x_{n+1} = (1 + \tau^{\text{nati}})x_n = (1 + \tau^{\text{nati}})^2x_{n-1} = \dots = (1 + \tau^{\text{nati}})^nx_1 \quad (3)$$

## 2.2 Nuovi nati e morti

Se consideriamo anche i morti, chiamando  $\tau^{\text{morti}}$  il *tasso di mortalità* fisso, il numero di abitanti nel 2009 è

$$x_2 = x_1 + \tau^{\text{nati}}x_1 - \tau^{\text{morti}}x_1$$

ossia il numero di abitanti nel 2008 più il numero di nuovi nati nel 2008 meno il numero di morti nel 2008. Se i due tassi si mantengono costanti, possiamo scrivere che nell'anno  $2008 + n$  la popolazione è di

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\text{nati}}x_n - \tau^{\text{morti}}x_n = (1 + \tau^{\text{nati}} - \tau^{\text{morti}})x_n, \quad n \geq 1 \quad (4)$$

L'andamento è ancora esponenziale, ma, essendo  $\tau^{\text{morti}} > \tau^{\text{nati}}$ , la popolazione è destinata all'estinzione. Il numero di abitanti nell'anno  $2008 + n$  è, per quanto visto,

$$x_{n+1} = (1 + \tau^{\text{nati}} - \tau^{\text{morti}})^n x_1 \quad (5)$$

### Domande:

4. Quanti abitanti ci saranno il primo gennaio 2100, considerando sia il tasso di natalità che di mortalità del 2008?
5. Mantenendo fisso il valore del tasso di natalità, quale dovrebbe essere il valore del tasso di mortalità per avere l'estinzione della popolazione il primo gennaio 2100?

Con i tassi attuali, quando si estinguerà la popolazione? Bisogna risolvere l'equazione (in  $n$ )

$$(1 + \Delta\tau)^n x_1 = 0$$

ove abbiamo posto  $\Delta\tau = \tau^{\text{nati}} - \tau^{\text{morti}}$ . Se  $x_1 \neq 0$  e  $0 < (1 + \Delta\tau) < 1$  tale equazione però non ammette soluzione. Dove sta il problema? Da nessuna parte: bisogna ricordare però che il numero di abitanti è un numero *naturale*. Non appena allora si raggiungerà una popolazione con al massimo un abitante, l'anno seguente ci sarà estinzione (anche perché un abitante non può avere figli...). Dunque, si deve risolvere l'equazione (in  $r$ )

$$(1 + \Delta\tau)^r x_1 = 1$$

(usiamo  $r$  perché vogliamo, come soluzione,  $n$  numero naturale e non  $r$  numero reale). L'estinzione avverrà al primo  $n$  numero naturale tale che  $n > r$ .



## 2.3 Nuovi nati, morti e migrazioni

Infine, aggiungiamo la quota di migrazione che chiamiamo  $m$  ed è costante e indipendente dal numero di abitanti (in generale, può essere positivo, nullo o negativo). Pertanto, nell'anno  $2008 + n$  si ha

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\text{nati}}x_n - \tau^{\text{morti}}x_n + m = (1 + \Delta\tau)x_n + m$$

Questo modello di crescita di popolazione si chiama *modello di Malthus*. (EXCEL) Qual è l'andamento della popolazione? Nel caso italiano, si ha  $1 + \Delta\tau < 1$  e  $m > 0$ . A partire dall'anno 2009 si ha

$$\begin{aligned}x_2 &= (1 + \Delta\tau)x_1 + m = 60\,045\,068 > x_1 = 59\,619\,290 \\x_3 &= (1 + \Delta\tau)x_2 + m > (1 + \Delta\tau)x_1 + m = x_2 \\x_4 &= (1 + \Delta\tau)x_3 + m > (1 + \Delta\tau)x_2 + m = x_3\end{aligned}\tag{6}$$

eccetera. Possiamo concludere (per il “principio di induzione del somaro”) che

$$x_{n+1} > x_n, \quad n \geq 1\tag{7}$$

Inoltre (ricordiamo che  $\Delta\tau < 0$ )

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= \Delta\tau x_1 + m \\x_3 - x_2 &= \Delta\tau x_2 + m < \Delta\tau x_1 + m = x_2 - x_1 \\x_4 - x_3 &= \Delta\tau x_3 + m < \Delta\tau x_2 + m = x_3 - x_2\end{aligned}$$

eccetera. Quindi, la popolazione cresce, ma sempre meno. Si tratta di capire allora se la popolazione cresce fino ad esplodere (*esplosione*) oppure tende a stabilizzarsi. Se esplodesse, significa che, fissato un numero di abitanti grande a piacere, diciamo  $M$ , ad un certo punto questo numero sarebbe superato. Sia allora

$$M = -\frac{m}{\Delta\tau}$$

e sia  $N$  tale che

$$x_N > -\frac{m}{\Delta\tau}$$

Allora  $\Delta\tau x_N + m < 0$  e quindi  $x_{N+1} = x_N + \Delta\tau x_N + m < x_N$ , in contrasto con quanto scritto in (7). Dunque la popolazione cresce ma non può superare la quantità  $-m/\Delta\tau$ , verso la quale si stabilizza (per inciso, nel caso italiano tale quantità vale circa 3 057 680 239).

**Domande:**

6. Considerando le nascite, le morti e il flusso migratorio, la popolazione si stabilizzerà, prima o poi, su un valore costante?
7. Quale dovrebbe essere il valore del flusso migratorio per mantenere una popolazione costante e uguale alla popolazione al primo gennaio 2008?
8. Quale dovrebbe essere il valore del flusso migratorio per avere una popolazione che si stabilizza attorno a 70 milioni di abitanti?

Per quanto abbiamo appena visto, per avere una popolazione costante e uguale a quella del primo gennaio 2008, dovrà essere

$$-\frac{m}{\Delta\tau} = x_1$$

cioè  $m = -\Delta\tau x_1$ . Si poteva pervenire a questo risultato anche risolvendo l'equazione (in  $m$ )

$$(1 + \Delta\tau)x_1 + m = x_1$$

che mantiene la popolazione nel 2009 uguale al 2008. Ovviamente, si può calcolare anche il flusso migratorio per fare in modo che la popolazione si stabilizzi attorno ad un valore, diciamo  $x_\infty$ , fissato: basta risolvere l'equazione (in  $m$ )

$$-\frac{m}{\Delta\tau} = x_\infty$$

Sarebbe utile poter scrivere una formula che lega la popolazione  $x_{n+1}$  alla popolazione iniziale  $x_1$ , come in (3) e (5). Osserviamo che

$$x_2 = (1 + \Delta\tau)x_1 + m$$

$$x_3 = (1 + \Delta\tau)x_2 + m = (1 + \Delta\tau)^2 x_1 + (1 + \Delta\tau)m + m$$

$$x_4 = (1 + \Delta\tau)x_3 + m = (1 + \Delta\tau)^3 x_1 + (1 + \Delta\tau)^2 m + (1 + \Delta\tau)m + m$$

e quindi, in generale,

$$x_{n+1} = (1 + \Delta\tau)^n x_1 + (1 + (1 + \Delta\tau) + (1 + \Delta\tau)^2 + \dots + (1 + \Delta\tau)^{n-1}) m$$

Per quanto visto in (2), si ha

$$x_{n+1} = (1 + \Delta\tau)^n x_1 + \frac{(1 + \Delta\tau)^n - 1}{(1 + \Delta\tau) - 1} m = (1 + \Delta\tau)^n x_1 + \frac{(1 + \Delta\tau)^n - 1}{\Delta\tau} m$$

**Domande:**

9. Quale dovrebbe essere il valore del flusso migratorio per avere 70 milioni di abitanti il primo gennaio 2100?
10. Fissato il flusso migratorio al valore nel 2008, quale dovrebbe essere il valore del tasso di natalità per avere 70 milioni di abitanti il primo gennaio 2100?

**2.4 Possibili complicazioni**

Il modello di Malthus è *lineare* (i termini  $x_n$  compaiono solo come monomi di grado uno) e a *coefficienti* ( $\tau^{\text{nati}}$ ,  $\tau^{\text{morti}}$ ,  $m$ ) *costanti*. Si potrebbe complicare il modello assumendo coefficienti dipendenti dal tempo (cioè da  $n$ ). In tal caso si avrebbe

$$x_{n+1} = x_n + (\tau_n^{\text{nati}} - \tau_n^{\text{morti}})x_n + m_n$$

Per i flussi migratori, la cosa appare plausibile, quando si fissino, per esempio per legge, pari a certe quantità negli anni a venire. Per i tassi di natalità e mortalità, è invece più probabile che possano dipendere dal numero di abitanti stesso (un governo potrebbe scoraggiare le nascite—togliendo i benefici che di solito si concedono alle famiglie numerose—qualora la popolazione raggiungesse livelli non sostenibili). In tal caso allora, essi sarebbero funzioni del numero di abitanti  $x_n$  e pertanto il modello diventerebbe *non lineare*.

### 3 Il modello logistico (o di Verhulst)

Come osservato precedentemente, l'ipotesi secondo cui il tasso di natalità e di mortalità sono costanti nel tempo potrebbe non essere vera. In particolare, se la popolazione dispone di risorse limitate (per esempio una quantità di acqua o di grano ben definita e non illimitata), è possibile che al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisca e/o che il tasso di mortalità cresca. In prima approssimazione possiamo assumere che questo avvenga in maniera *lineare* rispetto alla popolazione stessa.

Se indichiamo con  $x_n$  il numero di individui al tempo  $t_n$ , allora i tassi di natalità e mortalità, dipendenti da  $n$ , possono essere espressi dalle relazioni

$$\tau_n^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ax_n \quad \text{e} \quad \tau_n^{\text{morti}} = \tau_0^{\text{morti}} + bx_n,$$

dove  $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}, a$  e  $b$  sono tutte costanti positive. Si noti che  $\tau_0^{\text{nati}}$  e  $\tau_0^{\text{morti}}$  sono i tassi di natalità e mortalità nel caso limite di popolazione nulla, mentre  $a$  e  $b$  sono dei coefficienti che misurano il grado di *influenza* della popolazione sui tassi di natalità e mortalità, ovvero il grado di competizione all'interno della specie. In assenza di flusso migratorio, dalla relazione (4) si ha

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + \tau_n^{\text{nati}} - \tau_n^{\text{morti}})x_n \\ &= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - ax_n - \tau_0^{\text{morti}} - bx_n)x_n \\ &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a + b)x_n]x_n. \end{aligned} \quad (8)$$

#### Domande:

11. È possibile determinare i coefficienti  $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}, a$  e  $b$  utilizzando, per esempio, i dati relativi agli anni 2004 e 2008 riportati in tabella 3?
12. Nelle ipotesi di assenza di flusso migratorio e tassi di natalità e mortalità variabili, c'è speranza che la popolazione si stabilizzi su un valore costante  $x_\infty$  per tempi molto grandi (al tendere di  $n$  all'infinito)? Se sì, come si può determinare questo valore  $x_\infty$  in modo analitico?
13. Nel caso  $x_\infty$  esista, terminare il suo valore utilizzando i dati relativi agli anni 2004 e 2008 riportati in tabella 3.
14. Esiste un valore massimo  $x^{\text{max}}$  ammissibile per  $x_n$  dipendente da  $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}, a$  e  $b$ ? Se sì, determinarlo con i dati relativi agli anni 2004 e 2008.

Per rispondere alla prima domanda, concentriamoci sulle due incognite  $\tau_0^{\text{nati}}$  e  $a$ . Per determinarle abbiamo bisogno di due relazioni che leghino il

Anno	Nati	Morti	Popolazione
2004	562 599	546 658	57 888 245
2008	576 659	585 126	59 619 290

Tabella 3: Bilancio demografico anni 2004 e 2008. Dati ISTAT.

tasso di natalità in un certo anno al numero di individui nel medesimo anno. Prendendo in considerazione gli anni 2004 e 2008, dai valori in tabella, si ricavano dapprima i tassi di natalità nel 2004 e nel 2008, che indichiamo con  $\tau_{|2004}^{\text{nati}}$  e  $\tau_{|2008}^{\text{nati}}$ , e poi si ricavano  $a$  e  $\tau_0^{\text{nati}}$  risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \tau_{|2004}^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ax_{|2004} \\ \tau_{|2008}^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ax_{|2008} \end{cases}$$

ove  $x_{|2004}$  e  $x_{|2008}$  indicano il numero di individui nel 2004 e nel 2008. Procedendo in questo modo si ha

$$a = -\frac{\tau_{|2008}^{\text{nati}} - \tau_{|2004}^{\text{nati}}}{x_{|2008} - x_{|2004}} \quad \text{e} \quad \tau_0^{\text{nati}} = \tau_{|2008}^{\text{nati}} - \frac{\tau_{|2008}^{\text{nati}} - \tau_{|2004}^{\text{nati}}}{x_{|2008} - x_{|2004}} x_{|2008}.$$

Analogamente, per il tasso di mortalità si ottengono i coefficienti

$$b = \frac{\tau_{|2008}^{\text{morti}} - \tau_{|2004}^{\text{morti}}}{x_{|2008} - x_{|2004}} \quad \text{e} \quad \tau_0^{\text{morti}} = \tau_{|2008}^{\text{morti}} - \frac{\tau_{|2008}^{\text{morti}} - \tau_{|2004}^{\text{morti}}}{x_{|2008} - x_{|2004}} x_{|2008}.$$

Per rispondere alla seconda domanda, si osservi che se la popolazione raggiunge, per tempi molto grandi, un valore asintotico  $x_\infty$ , allora per  $n$  grande si ha  $x_{n+1} = x_n = x_\infty$ . Pertanto, per determinare  $x_\infty$ , basta sostituirlo nell'equazione che descrive l'evoluzione del sistema dinamico ottenendo

$$x_\infty = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a + b)x_\infty]x_\infty$$

da cui

$$x_\infty = \frac{\tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a + b}.$$

Si conclude che:

- se  $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$  allora  $x_\infty = 0$ , ovvero la popolazione si estingue (il numero di individui non può essere negativo, alla peggio è nullo)
- se  $\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$  allora  $x_\infty \neq 0$  e la popolazione si stabilizza su questo valore a meno di “comportamenti strani”

- al crescere di  $a$  e  $b$ , che misurano il grado di competizione per le risorse all'interno della specie, si ha che  $x_\infty$  diminuisce come atteso
- nel limite in cui  $a = b = 0$ , l'equazione della logistica si riduce a (4), con tassi di natalità e mortalità *costanti*, e si ha un andamento esponenziale (esplosione o estinzione) come visto nella sezione 2.2.

Infine, per rispondere all'ultima domanda, si osservi che la costante

$$x^{\max} = \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a + b} > x_\infty$$

è il massimo valore ammissibile per  $x_n$  poiché se  $x_n$  fosse maggiore di  $x^{\max}$ , allora dalla relazione (8) si otterrebbe  $x_{n+1} < 0$ , che non ha senso. Il fatto che  $x^{\max}$  sia maggiore di  $x_\infty$  significa che l'assestamento della popolazione può avvenire in maniera non monotona.

Utilizzando i dati disponibili sulla popolazione italiana per gli anni 2004 e 2008 (vedi tabella) ed escludendo il flusso migratorio, rispondere alle seguenti

### Domande:

15. In che anno, partendo dal 2008, la popolazione italiana differirà da  $x_\infty$  meno dello 0.5% (in valore assoluto)?
16. Se, a seguito di una particolare sfiducia nel futuro, il tasso di natalità  $\tau_0^{\text{nati}}$  dimezzasse, a parità di tasso di mortalità  $\tau_0^{\text{morti}}$ , quale sarebbe il destino degli italiani?

Vediamo ora come sia possibile scrivere un'equazione di evoluzione della popolazione che, anziché utilizzare il numero di individui "assoluto"  $x_n$ , utilizzi una popolazione "riscalata"  $p_n$  tale che  $0 < p_n < 1$ . Da

$$x_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a + b)x_n]x_n,$$

dividendo entrambi i membri per  $x^{\max}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x^{\max}} &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a + b)x_n] \frac{x_n}{x^{\max}} \\ &= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[ 1 - \frac{a + b}{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}} x_n \right] \frac{x_n}{x^{\max}} \\ &= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[ 1 - \frac{x_n}{x^{\max}} \right] \frac{x_n}{x^{\max}} \end{aligned}$$

da cui, introducendo

$$A = 1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}} \quad \text{e} \quad p_n = \frac{x_n}{x^{\max}} = \frac{a + b}{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}} x_n,$$

si ottiene semplicemente

$$p_{n+1} = Ap_n(1 - p_n), \quad (9)$$

nota come *equazione logistica discreta*.

### Domande:

17. Quanto vale  $p_\infty$ , ovvero il valore asintotico normalizzato?
18. Entro quali limiti deve variare il parametro positivo  $A$  in modo da garantire che la popolazione normalizzata  $p_n$  sia sempre  $0 < p_n < 1$ ?

In termini di  $A$ , il valore asintotico (o di equilibrio) della popolazione  $p_n$  è  $p_\infty = 1 - 1/A$ , come è facile ottenere sostituendo  $p_n = p_{n+1} = p_\infty$  nell'equazione (9). Per avere  $0 < p_n < 1$  per ogni  $n$  deve essere  $0 < A < 4$  poiché il vertice della parabola  $y = Ax(1 - x)$  è  $V(1/2, A/4)$ , da cui  $0 < A/4 < 1$ .

Al variare di  $A$  in questo range di valori si osservano varie *transizioni*:

- Se  $0 < A \leq 1$ , ovvero se  $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$ , allora  $p_\infty = 1 - 1/A = 0$  e la specie si estingue (in realtà sarebbe  $p_\infty = 1 - 1/A \leq 0$ , ma  $p_\infty$  non può essere negativo, alla peggio è nullo).
- Se  $1 < A \leq 2$  la popolazione si stabilizza velocemente al valore  $1 - 1/A$ , indipendentemente dal valore iniziale della popolazione.
- Se  $2 < A \leq 3$  la popolazione si stabilizza comunque al valore  $1 - 1/A$  ma oscillando attorno ad esso per un po' di tempo. La convergenza risulta molto lenta per  $A = 3$ .
- Se  $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$  la popolazione oscilla per sempre tra due valori, che dipendono da  $A$  (comportamento periodico).
- Se  $\sim 3.45 < A < \sim 3.54$  la popolazione oscilla per sempre tra 4 valori (primo raddoppio del periodo).
- Se  $A > \sim 3.54$  la popolazione oscilla tra 8 valori, poi 16 poi 32, etc. (cascata di raddoppio del periodo).
- Se  $A \approx 3.57$  si osserva un comportamento *caotico*, ovvero minime variazioni del valore iniziale della popolazione provocano risultati decisamente diversi, che sembrano del tutto insensati (sensibilità alle condizioni iniziali).

- La maggior parte dei valori di  $A$  oltre 3.57 esibiscono un comportamento caotico, ma ci sono comunque ancora dei valori isolati di  $A$  che non mostrano comportamenti caotici (isole di stabilità). Per esempio, iniziando da  $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$  si osservano oscillazioni tra tre valori, poi 6 valori, poi 12 etc.

**Domande:**

19. Si può pensare ad un *metodo grafico* per determinare l'evoluzione nel tempo e il destino della popolazione normalizzata  $p_n$ ?
20. Scelto  $1 < A < 3$  e scelta una condizione iniziale  $0 < p_1 < 1$ , verificare numericamente che  $p_\infty$  è pari a  $1 - 1/A$ .
21. Fissato  $A = 2.9$  e scelte le condizioni iniziali  $p_1 = 0.10000$  e  $p_1 = 0.10001$  che differiscono solo per la quinta cifra significativa, determinare la prima cifra significativa per la quale differiscono le popolazioni  $p_{100}$ . Quali conclusioni si possono trarre?
22. Fissato  $A = 3.2$ , determinare i valori, precisi alla decima cifra significativa, tra i quali oscilla  $p_n$ .
23. Fissato  $A = 3.5$ , determinare i valori, precisi alla decima cifra significativa, tra i quali oscilla  $p_n$ .
24. Fissato  $A = 3.6$  e scelte le condizioni iniziali  $p_1 = 0.10000$  e  $p_1 = 0.10001$  che differiscono solo per la quinta cifra significativa, determinare la prima cifra significativa per la quale differiscono le popolazioni  $p_{100}$ . Quali conclusioni si possono trarre confrontando i risultati con quelli della domanda 3?
25. Fissato  $A = 3.8301$ , determinare i valori, precisi alla decima cifra significativa, tra i quali oscilla  $p_n$ .



## 4 Dinamica di epidemie: il modello SIR

Consideriamo ora la dinamica di una malattia infettiva. Al tempo  $t_n$  possiamo suddividere una popolazione di  $N$  individui in

- il numero di individui *infettabili*  $s_n$
- il numero di individui *infetti*  $i_n$
- il numero di individui *immuni*  $r_n$  in seguito a guarigione e non più infettabili

La forza di infezione può essere espressa da (STUDENTI)

$$\lambda_n = \frac{c}{N} \chi i_n$$

ove  $c/N$  è la frazione di persone contattate da un singolo individuo per unità di tempo e  $\chi$  la *contagiosità* a seguito di un contatto con un individuo infetto. Ad esempio, se  $\chi = 1/2$ , significa che se un individuo infetto entra in contatto con 100 persone, 50 di esse risulteranno infettate. Indichiamo infine con  $\gamma$  il *tasso di guarigione*, cioè la frazione del numero di individui che, nell'unità di tempo (il giorno), passa dallo stato di "infetto" allo stato di "immune". Possiamo scrivere allora il seguente sistema

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \lambda_n s_n \\ i_{n+1} = i_n + \lambda_n s_n - \gamma i_n \\ r_{n+1} = r_n + \gamma i_n \end{cases} \quad (10)$$

### Domande:

Si consideri una popolazione con  $s_1 = 50$ ,  $i_1 = 20$ ,  $r_1 = 10$ , numero di contatti per individuo  $c = 13$ , contagiosità  $\chi = 0.1$  e tasso di guarigione  $\gamma = 1/10$ .

26. Cosa succede dopo 42 giorni?

27. Se si considera invece  $c = 15$ , cosa succede dopo tre giorni?

Sommando i termini di sinistra e destra, rispettivamente, si trova

$$s_{n+1} + i_{n+1} + r_{n+1} = s_n + i_n + r_n \quad (11)$$

e dunque il numero totale di individui rimane costante e pari ad  $N$ . Per quanto riguarda il numero di infettabili, poiché la forza di infezione è positiva,

esso non può che decrescere. Esisterà dunque un valore  $s_\infty$  verso il quale si stabilizzerà. Usando la terza equazione in (10) e sostituendola in (11) si trova

$$s_{n+1} + i_{n+1} + \gamma i_n = s_n + i_n$$

Per tempi molto grandi (al tendere di  $n$  all'infinito) si avrà

$$s_\infty + (1 + \gamma)i_\infty = s_\infty + i_\infty$$

da cui segue  $i_\infty = 0$ . Dunque l'epidemia si estinguerà. Quali potrebbero essere le cause di non estinzione (STUDENTI)? Almeno due

- la malattia non produce individui immuni (per esempio, il raffreddore)
- si prendono in considerazione i nuovi nati che nascono automaticamente come infettabili.

Concentriamoci sul secondo caso e consideriamo un modello malthusiano *neutrale*, in cui cioè il tasso di natalità e mortalità *giornaliero* coincidano e siano pari a  $\tau^g$ . Per inciso, se indichiamo con  $\tau^a$  il tasso di natalità e mortalità annuale, vale la relazione

$$\tau^a = (1 + \tau^g)^{365} - 1$$

che si ricava facendo evolvere una popolazione con tasso giornaliero  $\tau^g$  per 365 giorni e calcolando l'incremento di popolazione finale. Per quanto detto, tutti i nuovi nati si trovano nello stato di infettabili, mentre la mortalità colpisce indifferentemente qualunque sottogruppo della popolazione (nel caso di epidemia non letale). Allora il modello diventa

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \lambda_n s_n + \tau^g N - \tau^g s_n \\ i_{n+1} = i_n + \lambda_n s_n - \gamma i_n - \tau^g i_n \\ r_{n+1} = r_n + \gamma i_n - \tau^g r_n \end{cases}$$

Notiamo che, essendo  $s_n + i_n + r_n = N$ , la popolazione non varia nel tempo in conseguenza alla natalità e mortalità. Introduciamo la *capacità riproduttiva di base*

$$\mathcal{R}_0 = \frac{c\chi}{\gamma + \tau^g}$$

Tentiamo di dare un significato a questo numero. Supponiamo che la durata media dell'infezione sia pari a  $\mu$  giorni. Se ipotizziamo che il numero di individui infetti da un giorno, da due giorni, da tre giorni e così via sia lo stesso, allora, nell'unità di tempo (il giorno) viene a mancare la frazione (STUDENTI)  $1/\mu$  di infetti. Siccome il tasso di infetti che viene a mancare è dato dalla somma dei tassi di guarigione e di morte, si ha  $\mu = 1/(\gamma + \tau^g)$ . Dunque,  $\mathcal{R}_0$  ha il significato di numero di persone infettate da un singolo individuo infetto per tutta la durata dell'infezione. Più questo numero è grande, più la malattia si diffonde.

## Domande

28. Con un tasso di natalità/mortalità giornaliero  $\tau^g = 0.005$ , cosa succede dopo 42 giorni? E dopo 100? E dopo 200?

In particolare, se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , è possibile la seguente situazione per tempi molto grandi

$$s_\infty = \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \quad i_\infty = \frac{\tau^g N}{\gamma + \tau^g} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right), \quad r_\infty = \frac{\gamma N}{\gamma + \tau^g} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$$

Ciò significa che se si sostituisce  $s_n$  e  $s_{n+1}$  con  $s_\infty$ ,  $i_n$  e  $i_{n+1}$  con  $i_\infty$  e  $r_n$  e  $r_{n+1}$  con  $r_\infty$  nel sistema sopra si ottiene un'identità. Si osserva che il numero di infetti  $i_\infty$  è costante e diverso da zero (malattia *endemica*). Come far fronte (STUDENTI)? O riducendo il valore di  $\mathcal{R}_0$  a uno (e l'unica possibilità di intervento è quella di aumentare il tasso di mortalità), oppure con un *vaccino*. Consideriamo il tasso di vaccinazione  $v$  che sposta un certo numero di persone dal gruppo degli infettabili al gruppo degli immuni. Il modello diventa allora

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \lambda_n s_n + \tau^g N - \tau^g s_n - v s_n \\ i_{n+1} = i_n + \lambda_n s_n - \gamma i_n - \tau^g i_n \\ r_{n+1} = r_n + \gamma i_n - \tau^g r_n + v s_n \end{cases}$$

che ammette la seguente soluzione:

$$s_\infty = \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \quad i_\infty = \frac{\tau^g N}{\gamma + \tau^g} \left(1 - \frac{\tau^g + v}{\tau^g \mathcal{R}_0}\right), \quad r_\infty = \frac{\gamma N}{\gamma + \tau^g} \left(1 - \frac{\tau^g + v}{\tau^g \mathcal{R}_0}\right) + \frac{v N}{\tau^g \mathcal{R}_0}$$

Tale soluzione non è ammissibile per  $\tau^g \mathcal{R}_0 < \tau^g + v$ , cioè  $v > \tau^g (\mathcal{R}_0 - 1)$  e, in tal caso, l'unica possibilità è

$$s_\infty = \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \quad i_\infty = 0, \quad r_\infty = \frac{v N}{\tau^g \mathcal{R}_0}$$

ossia uno stato di *immunità di massa*.

## Domande:

Si consideri una popolazione con  $s_1 = 50$ ,  $i_1 = 20$ ,  $r_1 = 10$ , tasso di natalità/mortalità giornaliero  $\tau^g = 0.005$ , numero di contatti per individuo  $c = 13$ , contagiosità  $\chi = 0.1$  e tasso di guarigione  $\gamma = 1/10$ .

29. Quanto vale la capacità riproduttiva di base  $\mathcal{R}_0$ ?

30. Quanto dovrebbe valere il tasso di vaccinazione  $v$  per assicurare l'estinzione dell'infezione?
31. Si simuli l'andamento dell'infezione con tassi di vaccinazione variabili, da zero fino al minimo necessario per avere l'estinzione dell'infezione.
32. Che tasso di vaccinazione serve per avere l'estinzione dell'infezione al cinquantesimo giorno?

## 5 Interazione tra due popolazioni (parte facoltativa)

Il modello logistico (o di Verhulst) ci ha permesso di capire che la competizione all'interno di una singola specie, quando le risorse disponibili sono limitate, provoca l'insorgere di un termine quadratico nel modello che ne descrive la dinamica (il termine  $x_n^2$  nell'equazione (8)).

Consideriamo ora due popolazioni che vivono nello stesso territorio. Se le due specie non si influenzano in alcun modo, ovvero se tra di esse non esiste alcun tipo di interazione, allora la dinamica di ciascuna di esse è indipendente dalla presenza dell'altra. In assenza di flusso migratorio ed ipotizzando competizione per le risorse all'interno di ciascuna specie (competizione *intra*-specifica), possiamo scrivere

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \tau^x x_n - C^{xx} x_n^2 \\ y_{n+1} = y_n + \tau^y y_n - C^{yy} y_n^2 \end{cases}$$

dove  $\tau^x = (\tau^{\text{nati}})^x - (\tau^{\text{morti}})^x$  è il tasso di crescita netto (differenza tra il tasso di natalità e mortalità) della popolazione  $x$ ; analogamente  $\tau^y = (\tau^{\text{nati}})^y - (\tau^{\text{morti}})^y$  è il tasso di crescita netto della popolazione  $y$ , mentre  $C^{xx}$  e  $C^{yy}$  sono i coefficienti di competizione *intra*-specifica rispettivamente della specie  $x$  e  $y$ . Le costanti  $\tau^x$  e  $\tau^y$  possono essere sia positive che negative, mentre  $C^{xx}$  e  $C^{yy}$  sono positive. Pur essendo messe a sistema, le due equazioni sono indipendenti e possono essere risolte separatamente (sistema di equazioni disaccoppiate). Si osservi che il numero di individui delle due specie per tempi molto grandi,  $(x_\infty, y_\infty)$ , sono  $(0, 0)$  oppure  $(\frac{\tau^x}{C^{xx}}, \frac{\tau^y}{C^{yy}})$ . La soluzione  $(\frac{\tau^x}{C^{xx}}, \frac{\tau^y}{C^{yy}})$  ha senso solo se  $\tau^x > 0$  e  $\tau^y > 0$ . Siccome le due popolazioni sono completamente indipendenti, una modifica dei parametri  $\tau^x$  o  $C^{xx}$  non provoca cambiamenti sulla popolazione  $y$  e viceversa.

### Domande:

33. Se entrambe le specie hanno lo stesso coefficiente di competizione *intra*-specifica ma la specie  $x$  si è particolarmente adattata all'ambiente mentre la specie  $y$  no, che segno hanno i coefficienti  $\tau^x$  e  $\tau^y$ ? Qual è il destino (per tempi grandi) delle due specie?
34. Sempre nell'ipotesi di specie  $x$  adattata all'ambiente e specie  $y$  non adattata, che segno dovrebbe avere il coefficiente  $C^{yy}$  per garantire la sopravvivenza della specie  $y$ ? Che significato assume, in questo caso, il coefficiente  $C^{yy}$ ?

Il problema di due popolazioni non interagenti non aggiunge molto a quanto noto sulla dinamica di una singola popolazione. Al contrario, cosa succede se le popolazioni entrano in competizione per le risorse disponibili sul territorio? (STUDENTI) Evidentemente, se le specie sono in competizione la presenza della specie  $y$  ad un certo istante temporale  $t_n$  causa una diminuzione del numero di individui della specie  $x$  al tempo  $t_{n+1}$ . Come si può modificare il modello per tenerne conto? (STUDENTI) Nel caso più semplice si può pensare che il tasso di diminuzione del numero di individui della specie  $x$  nel passaggio dal tempo  $t_n$  al tempo  $t_{n+1}$  sia direttamente proporzionale al numero di individui della specie  $y$  presenti al tempo  $t_n$ . Viceversa, il numero di individui della specie  $y$  sperimenterà nel passaggio dal tempo  $t_n$  al tempo  $t_{n+1}$  un tasso di diminuzione proporzionale al numero di individui della specie  $x$  al tempo  $t_n$ . In formule,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \tau^x x_n - C^{xx} x_n^2 - C^{xy} x_n y_n \\ y_{n+1} = y_n + \tau^y y_n - C^{yy} y_n^2 - C^{yx} x_n y_n, \end{cases}$$

dove le nuove costanti positive  $C^{xy}$  e  $C^{yx}$  sono i coefficienti di competizione *inter-specifica* rispettivamente della specie  $x$  a causa della presenza della specie  $y$  e della specie  $y$  a causa della presenza della specie  $x$ .

Le soluzioni per tempi grandi (di equilibrio) sono

$$(0, 0), \quad \left( \frac{\tau^x}{C^{xx}}, 0 \right), \quad \left( 0, \frac{\tau^y}{C^{yy}} \right) \quad \text{e} \quad \left( \frac{C^{xy}\tau^y - C^{yy}\tau^x}{C^{xy}C^{yx} - C^{xx}C^{yy}}, \frac{C^{yx}\tau^x - C^{xx}\tau^y}{C^{xy}C^{yx} - C^{xx}C^{yy}} \right).$$

### Domande:

35. Verificare analiticamente le soluzioni precedenti.
36. Se la popolazione  $x$  è erbivora, ha risorse illimitate ed è perfettamente adattata all'ambiente, mentre la popolazione  $y$  è carnivora e si nutre solo della popolazione  $x$ , che segno devono avere i coefficienti  $\tau^x$ ,  $\tau^y$ ,  $C^{xx}$ ,  $C^{yy}$ ,  $C^{xy}$  e  $C^{yx}$  ipotizzando che per entrambe le specie ci sia competizione *intra-specifica*? (modello *preda-predatore*)
37. Utilizzando  $\tau^x = 1$ ,  $\tau^y = -1$ ,  $C^{xx} = C^{yy} = 0.8$ ,  $C^{xy} = 0.5$  e  $C^{yx} = -0.9$  discutere il destino delle due specie azzardando un'interpretazione biologica a partire dalle condizioni iniziali  $(x_1, y_1) = (0.3, 0.3)$ ,  $(x_1, y_1) = (0.3, 0.7)$ ,  $(x_1, y_1) = (0.7, 0.3)$  e  $(x_1, y_1) = (0.7, 0.7)$ . Il caso  $(x_1, y_1) = (0.3, 0.7)$  presenta delle apparenti difficoltà numeriche, come si possono risolvere?

38. Spiegare da un punto di vista biologico i risultati che si ottengono partendo da  $(x_1, y_1) = (0.1, 0.1)$ ,  $(x_1, y_1) = (0.3, 0.1)$ ,  $(x_1, y_1) = (0.2, 0.5)$ ,  $(x_1, y_1) = (0.9, 0.7)$  e  $(x_1, y_1) = (0.6, 0.9)$  quando:

(a)  $C^{xx} = \tau^x = C^{yy} = \tau^y = 1$  e  $C^{xy} = C^{yx} = k = 0.5$

(b)  $C^{xx} = \tau^x = C^{yy} = \tau^y = 1$  e  $C^{xy} = C^{yx} = k = 2$

(c)  $C^{xx} = \tau^x = C^{yy} = \tau^y = 1$ ,  $C^{xy} = 1.2$  e  $C^{yx} = 0.5$

(d)  $C^{xx} = \tau^x = C^{yy} = \tau^y = 1$ ,  $C^{xy} = 1.2$  e  $C^{yx} = -0.5$

39. Utilizzando  $\tau^x = \tau^y = 1.8$ ,  $C^{xy} = C^{yx} = 0.099$ ,  $C^{xx} = 0.1$  e  $C^{yy} = 0.098$ , riportare su un grafico le soluzioni che si ottengono in funzione di  $n$  partendo da:

(a)  $(x_1, y_1) = (5, 5)$

(b)  $(x_1, y_1) = (16, 2)$

(c)  $(x_1, y_1) = (2, 16)$

Che destino subiscono le due popolazioni nei tre casi? Si noti che nel caso (a) le popolazioni partono con lo stesso numero di individui, nel caso (b) la popolazione  $x$  parte notevolmente avvantaggiata, mentre nel caso (c) la popolazione  $x$  parte notevolmente svantaggiata. Questo comportamento è noto come *principio di esclusione competitiva*.

40. Con riferimento alla domanda 5, abbassando i coefficienti di competizione *inter-specifica* a  $C^{xy} = C^{yx} = 0.097$ , come cambiano i destini delle due popolazioni nei tre casi?

41. Se i coefficienti di competizione *inter-specifica* anziché essere positivi fossero negativi, quale significato avrebbe il termine di accoppiamento tra le due specie?

## A Calcolo di $\pi$

Consideriamo un cerchio di raggio unitario. La sua area vale dunque  $\pi$ . Consideriamo ora un poligono regolare di  $2^n$  lati inscritto nella circonferenza. Congiungendo i vertici del poligono con il centro della circonferenza, si ottengono  $2^n$  triangoli equivalenti, isosceli, con i due lati uguali di lunghezza unitaria e con l'angolo al centro pari a  $2\pi/2^n$  radianti. Dunque l'area di un singolo triangolo vale

$$T_{2^n} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2^n}$$

e dunque quella del poligono

$$P_{2^n} = \frac{2^n}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2^n} = \frac{2^n}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{2^n}}$$

da cui

$$\cos \frac{2\pi}{2^n} = \sqrt{1 - \frac{4P_{2^n}^2}{2^{2n}}} \quad (12)$$

Il segno positivo davanti alla radice quadrata è corretto: infatti, ha senso parlare di poligono inscritto solo se  $n \geq 2$ , da cui  $2\pi/2^n \leq \pi/2$  e dunque il suo coseno è non negativo. Consideriamo ora l'area del poligono regolare inscritto con  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$  lati: si ha

$$P_{2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2 \cdot 2^n}$$

Usando la formula di bisezione del seno, si ha

$$P_{2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{2^n}}{2}}$$

e inserendo la (12), si trova la relazione ricorsiva

$$P_{2^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n}{2} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4P_{2^n}^2}{2^{2n}}}}{2}}$$

che si può scrivere

$$P_{2^{n+1}} = 2^{n-1/2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} P_{2^n}^2}}, \quad n \geq 2$$

Dunque, l'area del poligono di  $2^{n+1}$  lati si può ricavare dall'area del poligono di  $2^n$  lati con semplici operazioni aritmetiche e estrazioni di radici quadrate.



In particolare, per  $n = 2$ , si ha l'area del quadrato inscritto che vale 2. Per  $n$  grande, l'area del poligono di  $2^{n+1}$  lati tende all'area del cerchio, dunque a  $\pi$ . Dunque, cambiando i nomi,

$$P_2 = z_1 = 0$$

$$P_4 = z_2 = 2$$

$$P_{2^{n+1}} = z_{n+1} = 2^{n-1/2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}, \quad n \geq 2$$

si ha che  $z_{n+1}$  tende a  $\pi$  per  $n$  grande. Cosa succede se tentiamo di calcolare  $z_{n+1}$  per  $n$  grande? Si hanno errori di *cancellazione numerica*. È lo stesso fenomeno che si ha tentando di calcolare

$$\frac{(1+x) - 1}{x}$$

con  $x = 10^{-13}$ .

Per risolvere il problema nel calcolo di  $\pi$ , occorre razionalizzare, cioè calcolare  $z_{n+1}$  come

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_{n+1} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}} = \frac{2^{n-1/2} \sqrt{1 - (1 - 4^{1-n} z_n^2)}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}} = \\ &= \frac{2^{n-1/2} \sqrt{4^{1-n} z_n^2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}} = \frac{\sqrt{2} z_n}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}} \end{aligned}$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] MercatiGrano.it. <http://www.mercatigrano.it/>.
- [2] Geo demo ISTAT. <http://demo.istat.it/>.
- [3] Wikipedia, the free encyclopedia. <http://www.wikipedia.org>.