Calcolo numerico 2 con laboratorio

Prof. Marco Caliari

Verona, 15 febbraio 2023

Inviare un unico file, ottenuto comprimendo una cartella dal nome uguale al proprio numero di matricola e contenente tutti i file necessari ad eseguire gli script `main1.m`, ..., `main6.m`, uno per ogni punto del testo, all'indirizzo email `marco.caliari@univr.it`. File difformi da queste indicazioni comporteranno l'annullamento del compito. Qualunque riga di codice o commento non pertinente sarà valutato negativamente. Questo foglio va compilato e riconsegnato. Chi intende ritirarsi mandi comunque un'email comunicando la propria intenzione.
Numero di matricola _________

1. Si determini il numero minimo di iterazioni del metodo di Gauss–Seidel per risolvere il sistema lineare
$$\begin{bmatrix} 3.3 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 25 \end{bmatrix}$$
in modo che l'errore relativo in norma euclidea rispetto ad una soluzione di riferimento sia inferiore a 10^{-3}.

2. Dato il sistema lineare
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
si usi la decomposizione SVD per trovare una soluzione che minimizza il residuo e una soluzione, diversa dalla precedente, di norma minima che minimizza il residuo.

3. Il primo passo del metodo di Eulero implicito per la risoluzione del modello SIR
$$\begin{cases} S'(t) = -rS(t)\dfrac{I(t)}{1000} \\ I'(t) = rS(t)\dfrac{I(t)}{1000} - 2I(t) \\ R'(t) = 2I(t) \end{cases}$$
richiede di risolvere il sistema non lineare
$$\begin{cases} S_1 = S_0 - krS_1\dfrac{I_1}{1000} \\ I_1 = I_0 + k\left(rS_1\dfrac{I_1}{1000} - 2I_1\right) \\ R_1 = R_0 + k2I_1 \end{cases}$$
Lo si applichi per trovare $[S_1, I_1, R_1]^T$ a partire da $[S_0, I_0, R_0]^T = [999, 1, 0]^T$ con il parametro $r = 9$ e un passo temporale $k = 0.1$.

4. Detta M la matrice del sistema lineare del primo esercizio e A la matrice del sistema lineare del secondo esercizio, si usi il metodo delle potenze per calcolare l'autovalore più grande in modulo di $M^{-1}A$, senza calcolare esplicitamente M^{-1}.

5. Si determinino i coefficienti della spline cubica che interpola la funzione $y = \sin(x)$ in 7 punti equispaziati tra 0 e $\pi/2$, che ha derivata seconda nulla nel primo punto a sinistra e derivata terza continua nel penultimo punto a destra.

6. Si calcoli l'area della regione del piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{2 - x^2}}$$

e le rette $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ e $y = 0$ con almeno tre cifre significative corrette usando un'opportuna formula gaussiana. È possibile calcolare il valore esatto? Se sì, con quanti nodi di quadratura?