

UNITED STATES DEPARTMENT OF COMMERCE • Luther H. Hodges, *Secretary*  
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS • A. V. Astin, *Director*

# Handbook of Mathematical Functions

With

Formulas, Graphs, and Mathematical Tables

Edited by  
Milton Abramowitz and Irene A. Stegun



National Bureau of Standards  
Applied Mathematics Series • 55

Issued June 1964

Tenth Printing, December 1972, with corrections

Table 25.4 ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas = $\pm x_i$ (Zeros of Legendre Polynomials)			Weight Factors = $w_i$		
$\pm x_i$	$w_i$		$\pm x_i$	$w_i$	
<i>n</i> = 2			<i>n</i> = 8		
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000		0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362	
			0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887	
			0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374	
			0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376	
<i>n</i> = 3			<i>n</i> = 9		
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889		0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260	
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556		0.32425 34234 03809	0.31234 70770 40003	
			0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935	
			0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857	
			0.96816 02395 07626	0.08127 43883 61574	
<i>n</i> = 4			<i>n</i> = 10		
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546		0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753	
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454		0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996	
			0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982	
			0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581	
			0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688	
<i>n</i> = 5			<i>n</i> = 12		
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889		0.12523 34085 11469	0.24914 70458 13403	
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366		0.36783 14989 98180	0.23349 25365 38355	
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189		0.58731 79542 86617	0.20316 74267 23066	
			0.67940 95682 99024	0.16007 83285 43346	
			0.86506 33666 88985	0.10693 93259 95318	
			0.97390 65285 17172	0.04717 53363 86512	
<i>n</i> = 6			<i>n</i> = 16		
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691		0.09501 25098 37637 440185	0.18945 06104 55068 496285	
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139		0.28160 35507 79258 913230	0.18260 34150 44923 588867	
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170		0.45801 67776 57227 386342	0.16915 65193 95002 538189	
			0.61787 62444 02643 748447	0.14959 59888 16576 732081	
			0.75540 44083 55003 033895	0.12462 89712 55533 872052	
			0.86563 12023 87831 743880	0.09515 85116 82492 784810	
			0.94457 50230 73232 576078	0.06225 35239 38647 892863	
			0.98940 09349 91649 932596	0.02715 24594 11754 094852	
<i>n</i> = 7			<i>n</i> = 20		
0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469		0.07652 65211 33497 333755	0.15275 33871 30725 850698	
0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119		0.22778 58511 41645 078080	0.14917 29864 72603 746788	
0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277		0.37370 60887 15419 560673	0.14209 61093 18382 051329	
0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870		0.51086 70019 50827 098004	0.13168 86384 49176 626898	
			0.63605 36807 26515 025453	0.11819 45319 61518 417312	
			0.74633 19064 60150 792614	0.10193 01198 17240 435037	
			0.83911 69718 22218 823395	0.08327 67415 76704 748725	
			0.91223 44282 51325 905868	0.06267 20483 34109 063570	
			0.96397 19272 77913 791268	0.04060 14298 00386 941331	
			0.99312 85991 85094 924786	0.01761 40071 39152 118312	
<i>n</i> = 8			<i>n</i> = 24		
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889		0.06405 68928 62605 626085	0.12793 81953 46752 156974	
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366		0.19111 88674 73616 309159	0.12583 74563 46828 296121	
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189		0.31504 26796 96163 374387	0.12167 04729 27803 391204	
			0.43379 35076 26045 138487	0.11550 56680 53725 601353	
			0.54542 14713 88839 535658	0.10744 42701 15965 634783	
			0.64809 36519 36975 569252	0.09761 86521 04113 888270	
			0.74012 41915 78554 364244	0.08619 01615 31953 275917	
			0.82000 19859 73902 921954	0.07334 64814 11080 305734	
			0.88641 55270 04401 034213	0.05929 85849 15436 780746	
			0.93827 45520 02732 758524	0.04427 74388 17419 806169	
			0.97472 85559 71309 498198	0.02853 13886 28933 663181	
			0.99518 72199 97021 360180	0.01234 12297 99987 199547	

Compiled from P. Davis and P. Rabinowitz, Abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order, J. Research NBS 56, 35-37, 1956, RP2645; P. Davis and P. Rabinowitz, Additional abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order. Values for *n*=64, 80, and 96, J. Research NBS 60, 613-614, 1958, RP2875; and A. N. Lowan, N. Davids, and A. Levenson, Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 48, 739-743, 1942 (with permission).

Table 25.4

ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas= $\pm x_i$  (Zeros of Legendre Polynomials)      Weight Factors= $w_i$

$\pm x_i$	$n=32$				$w_i$			
0.04830	76656	87738	316235	0.09654	00885	14727	800567	
0.14447	19615	82796	493485	0.09563	87200	79274	859419	
0.23928	73622	52137	074545	0.09384	43990	80804	565639	
0.33186	86022	82127	649780	0.09117	38786	95763	884713	
0.42135	12761	30635	345364	0.08765	20930	04403	811143	
0.50689	99089	32229	390024	0.08331	19242	26946	755222	
0.58771	57572	40762	329041	0.07819	38957	87070	306472	
0.66304	42669	30215	200975	0.07234	57941	08848	506225	
0.73218	21187	40289	680387	0.06582	22227	76361	846838	
0.79448	37959	67942	406963	0.05868	40934	78535	547145	
0.84936	76137	32569	970134	0.05099	80592	62376	176196	
0.89632	11557	66052	123965	0.04283	58980	22226	680657	
0.93490	60759	37739	689171	0.03427	38629	13021	433103	
0.96476	22555	87506	430774	0.02539	20653	09262	059456	
0.98561	15115	45268	335400	0.01627	43947	30905	670605	
0.99726	38618	49481	563545	0.00701	86100	09470	096600	
$n=40$								
0.03877	24175	06050	821933	0.07750	59479	78424	811264	
0.11608	40706	75255	208483	0.07703	98181	64247	965588	
0.19269	75807	01371	099716	0.07611	03619	00626	242372	
0.26815	21850	07253	681141	0.07472	31690	57968	264200	
0.34199	40908	25758	473007	0.07288	65823	95804	059061	
0.41377	92043	71605	001525	0.07061	16473	91286	779695	
0.48307	58016	86178	712909	0.06791	20458	15233	903826	
0.54946	71250	95128	202076	0.06480	40134	56601	038075	
0.61255	38896	67980	237953	0.06130	62424	92928	939167	
0.67195	66846	14179	548379	0.05743	97690	99391	551367	
0.72731	82551	89927	103281	0.05322	78469	83936	824355	
0.77830	56514	26519	387695	0.04869	58076	35072	232061	
0.82461	22308	33311	663196	0.04387	09081	85673	271992	
0.86595	95032	12259	503821	0.03878	21679	74472	017640	
0.90209	88069	68874	296728	0.03346	01952	82547	847393	
0.93281	28082	78676	533361	0.02793	70069	80023	401098	
0.95791	68192	13791	655805	0.02224	58491	94166	957262	
0.97725	99499	83774	262663	0.01642	10583	81907	888713	
0.99072	62386	99457	006453	0.01049	82845	31152	813615	
0.99823	77097	10559	200350	0.00452	12770	98533	191258	
$n=48$								
0.03238	01709	62869	362033	0.06473	76968	12683	922503	
0.09700	46992	09462	698930	0.06446	61644	35950	082207	
0.16122	23560	68891	718056	0.06392	42385	84648	186624	
0.22476	37903	94689	061225	0.06311	41922	86254	025657	
0.28736	24873	55455	576736	0.06203	94231	59892	663904	
0.34875	58862	92160	738160	0.06070	44391	65893	880053	
0.40868	64819	90716	729916	0.05911	48396	98395	635746	
0.46690	29047	50958	404545	0.05727	72921	00403	215705	
0.52316	09747	22233	033678	0.05519	95036	99984	162868	
0.57722	47260	83972	703818	0.05289	01894	85193	667096	
0.62886	73967	76513	623995	0.05035	90355	53854	474958	
0.67787	23796	32663	905212	0.04761	66584	92490	474826	
0.72403	41309	23814	654674	0.04467	45608	56694	280419	
0.76715	90325	15740	339254	0.04154	50829	43464	749214	
0.80706	62040	29442	627083	0.03824	13510	65830	706317	
0.84358	82616	24393	530711	0.03477	72225	64770	438893	
0.87657	20202	74247	885906	0.03116	72278	32798	088902	
0.90587	91367	15569	672822	0.02742	65097	08356	948200	
0.93138	66907	06554	333114	0.02357	07608	39324	379141	
0.95298	77031	60430	860723	0.01961	61604	57355	527814	
0.97059	15925	46247	250461	0.01557	93157	22943	848728	
0.98412	45837	22826	857745	0.01147	72345	79234	539490	
0.99353	01722	66350	757548	0.00732	75539	01276	262102	
0.99877	10072	52426	118601	0.00315	33460	52305	838633	

**Table 25.4**  
**ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION**

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas =  $\pm x_i$  (Zeros of Legendre Polynomials)    Weight Factors =  $w_i$

$n=64$				$n=80$			
$\pm x_i$							
0.02435	02926	63424	432509	0.04869	09570	09139	720383
0.07299	31217	87799	039450	0.04857	54674	41503	426935
0.12146	28192	96120	554470	0.04834	47622	34802	957170
0.16964	44204	23992	818037	0.04799	93885	96458	307728
0.21742	36437	40007	084150	0.04754	01657	14830	308662
0.26468	71622	08767	416374	0.04696	81828	16210	017325
0.31132	28719	90210	956158	0.04628	47965	81314	417296
0.35722	01583	37668	115950	0.04549	16279	27418	144480
0.40227	01579	63991	603696	0.04459	05581	63756	563060
0.44636	60172	53464	087985	0.04358	37245	29323	453377
0.48940	31457	07052	957479	0.04247	35151	23653	589007
0.53127	94640	19894	545658	0.04126	25632	42623	528610
0.57189	56462	02634	034284	0.03995	37411	32720	341387
0.61115	53551	72393	250249	0.03855	01531	78615	629129
0.64896	54712	54657	339858	0.03705	51285	40240	046040
0.68523	63130	54233	242564	0.03547	22132	56882	383811
0.71988	18501	71610	826849	0.03380	51618	37141	609392
0.75281	99072	60531	896612	0.03205	79283	54851	553585
0.78397	23589	43341	407610	0.03023	46570	72402	478868
0.81326	53151	22797	559742	0.02833	96726	14259	483228
0.84062	92962	52580	362752	0.02637	74697	15054	658672
0.86599	93981	54092	819761	0.02435	27025	68710	873338
0.88931	54459	95114	105853	0.02227	01738	08383	254159
0.91052	21370	78502	805756	0.02013	48231	53530	209372
0.92956	91721	31939	575821	0.01795	17157	75697	343085
0.94641	13748	58402	816062	0.01572	60304	76024	719322
0.96100	87996	52053	718919	0.01346	30478	96718	642598
0.97332	68277	89910	963742	0.01116	81394	60131	128819
0.98333	62538	84625	956931	0.00884	67598	26363	947723
0.99101	33714	76744	320739	0.00650	44579	68978	362856
0.99634	01167	71955	279347	0.00414	70332	60562	467635
0.99930	50417	35772	139457	0.00178	32807	21696	432947
0.01951	13832	56793	997654	0.03901	78136	56306	654811
0.05850	44371	52420	668629	0.03895	83959	62769	531199
0.09740	83984	41584	599063	0.03883	96510	59051	968932
0.13616	40228	09143	886559	0.03866	17597	74076	463327
0.17471	22918	32646	812559	0.03842	49930	06959	423185
0.21299	45028	57666	132572	0.03812	97113	14477	638344
0.25095	23583	92272	120493	0.03777	63643	62001	397490
0.28852	80548	84511	853109	0.03736	54902	38730	490027
0.32566	43707	47701	914619	0.03689	77146	38276	008839
0.36230	47534	99487	315619	0.03637	37499	05835	978044
0.39839	34058	81969	227024	0.03579	43939	53416	054603
0.43387	53708	31756	093062	0.03516	05290	44747	593496
0.46869	66151	70544	477036	0.03447	31204	51753	928794
0.50280	41118	88784	987594	0.03373	32149	84611	522817
0.53614	59208	97131	932020	0.03294	19393	97645	401383
0.56867	12681	22709	784725	0.03210	04986	73487	773148
0.60033	06228	29751	743155	0.03121	01741	88114	701642
0.63107	57730	46871	966248	0.03027	23217	59557	980661
0.66085	98989	86119	801736	0.02928	83695	83267	847693
0.68963	76443	42027	600771	0.02825	98160	57276	862397
0.71736	51853	62099	880254	0.02718	82275	00486	380674
0.74400	02975	83597	272317	0.02607	52357	67565	117903
0.76950	24201	35041	373866	0.02492	25357	64115	491105
0.79383	27175	04605	449949	0.02373	18828	65930	101293
0.81695	41386	81463	470371	0.02250	50902	46332	461926
0.83883	14735	80255	275617	0.02124	40261	15782	006389
0.85943	14066	63111	096977	0.01995	06108	78141	998929
0.87872	25676	78213	828704	0.01862	68142	08299	031429
0.89667	55794	38770	683194	0.01727	46520	56269	306359
0.91326	31025	71757	654165	0.01589	61835	83725	688045
0.92845	98771	72445	795953	0.01449	35080	40509	076117
0.94224	27613	09872	674752	0.01306	87615	92401	339294
0.95459	07663	43634	905493	0.01162	41141	20797	826916
0.96548	50890	43799	251452	0.01016	17660	41103	064521
0.97490	91405	85727	793386	0.00868	39452	69260	858426
0.98284	85727	38629	070418	0.00719	29047	68117	312753
0.98929	13024	99755	531027	0.00569	09224	51403	198649
0.99422	75409	65688	277892	0.00418	03131	24694	895237
0.99764	98643	98237	688900	0.00266	35335	89512	681669
0.99955	38226	51630	629880	0.00114	49500	03186	941534

**Table 25.4**  
**ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION**

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas= $\pm x_i$ (Zeros of Legendre Polynomials)				Weight Factors= $w_i$				
$\pm x_i$				$n = 96$	$w_i$			
0.01627	67448	49602	969579	0.03255	06144	92363	166242	
0.04881	29851	36049	731112	0.03251	61187	13868	835987	
0.08129	74954	64425	558994	0.03244	71637	14064	269364	
0.11369	58501	10665	920911	0.03234	38225	68575	928429	
0.14597	37146	54896	941989	0.03220	62047	94030	250669	
0.17809	68823	67618	602759	0.03203	44562	31992	663218	
0.21003	13104	60567	203603	0.03182	87588	94411	006535	
0.24174	31561	63840	012328	0.03158	93307	70727	168558	
0.27319	88125	91049	141487	0.03131	64255	96861	355813	
0.30436	49443	54496	353024	0.03101	03325	86313	837423	
0.33520	85228	92625	422616	0.03067	13761	23669	149014	
0.36569	68614	72313	635031	0.03029	99154	20827	593794	
0.39579	76498	28908	603285	0.02989	63441	36328	385984	
0.42547	89884	07300	545365	0.02946	10899	58167	905970	
0.45470	94221	67743	008636	0.02899	46141	50555	236543	
0.48345	79739	20596	359768	0.02849	74110	65085	385646	
0.51169	41771	54667	673586	0.02797	00076	16848	334440	
0.53938	81083	24357	436227	0.02741	29627	26029	242823	
0.56651	04185	61397	168404	0.02682	68667	25591	762198	
0.59303	23647	77572	080684	0.02621	23407	35672	413913	
0.61892	58401	25468	570386	0.02557	00360	05349	361499	
0.64416	34037	84967	106798	0.02490	06332	22483	610288	
0.66871	83100	43916	153953	0.02420	48417	92364	691282	
0.69256	45366	42171	561344	0.02348	33990	85926	219842	
0.71567	68123	48967	626225	0.02273	70696	58329	374001	
0.73803	06437	44400	132851	0.02196	66444	38744	349195	
0.75960	23411	76647	498703	0.02117	29398	92191	298988	
0.78036	90438	67433	217604	0.02035	67971	54333	324595	
0.80030	87441	39140	817229	0.01951	90811	40145	022410	
0.81940	03107	37931	675539	0.01866	06796	27411	467385	
0.83762	35112	28187	121494	0.01778	25023	16045	260838	
0.85495	90334	34601	455463	0.01688	54798	64245	172450	
0.87138	85059	09296	502874	0.01597	05629	02562	291381	
0.88689	45174	02420	416057	0.01503	87210	26994	938006	
0.90146	06353	15852	341319	0.01409	09417	72314	860916	
0.91507	14231	20898	074206	0.01312	82295	66961	572637	
0.92771	24567	22308	690965	0.01215	16046	71088	319635	
0.93937	03397	52755	216932	0.01116	21020	99838	498591	
0.95003	27177	84437	635756	0.01016	07705	35008	415758	
0.95968	82914	48742	539300	0.00914	86712	30783	386633	
0.96832	68284	63264	212174	0.00812	68769	25698	759217	
0.97593	91745	85136	466453	0.00709	64707	91153	865269	
0.98251	72635	63014	677447	0.00605	85455	04235	961683	
0.98805	41263	29623	799481	0.00501	42027	42927	517693	
0.99254	39003	23762	624572	0.00396	45543	38444	686674	
0.99598	18429	87209	290650	0.00291	07318	17934	946408	
0.99836	43758	63181	677724	0.00185	39607	88946	921732	
0.99968	95038	83230	766828	0.00079	67920	65552	012429	