

# Elementi Finiti: stime d'errore e adattività della griglia

Elena Gaburro

Università degli studi di Verona  
Master's Degree in Mathematics and Applications

05 giugno 2013

La **formulazione debole** di un problema ellittico su un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  è

$$\text{trovare } u \in V : \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

dove

- $V$  è un opportuno spazio di Hilbert
- $a(\cdot, \cdot)$  è una forma bilineare continua (con costante  $M$ ) e coerciva (con costante  $\alpha$ ) da  $V \times V$  in  $\mathbb{R}$
- $F(\cdot)$  è un funzionale lineare e continuo da  $V$  in  $\mathbb{R}$

Sotto queste ipotesi il teorema di Lax Milgram ci assicura esistenza ed unicità della soluzione.

Per trovare numericamente la soluzione, possiamo risolvere il **problema approssimato**, detto **problema di Galerkin**

$$\text{trovare } u_h \in V_h : \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

dove  $V_h$  è una famiglia di spazi t.c.  $V_h \subset V$ ,  $\dim V_h = N_h < \infty \quad \forall h > 0$ .  
Scelta una base dello spazio  $V_h$ ,  $\{\varphi_j, j = 1, 2, \dots, N_h\}$ , basterà che relazione sopra sia verificata per ogni funzione della base e, scritta  $u_h$  come combinazione delle funzioni di base, si deve risolvere

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_h$$

cioè il sistema  $Au = f$ , dove  $A = a(\varphi_j, \varphi_i)$  è detta matrice di **stiffness**.

## Metodo di Galerkin

- Lax Milgram garantisce esistenza ed unicità della soluzione
- La soluzione discreta  $u_h$  è stabile, uniformemente rispetto ad  $h$ :

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

- Il metodo è fortemente consistente
- Vale la seguente proprietà di ortogonalità

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

e quindi, a patto di scegliere uno spazio  $V_h$  che al decrescere di  $h$  tenda ad occupare l'intero spazio  $V$ , la soluzione  $u_h$  converge ad  $u$ .

- Vale il **Lemma di Céa**:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$$

# Stime d'errore

## Caso monodimensionale

Quindi comunque  $u_h$  converge ad  $u$ , ma **la velocità di convergenza del metodo** dipenderà dalla regolarità di  $u$  e dalla scelta dello spazio  $V_h$ . Il nostro scopo è fornire **una stima dell'errore** che tenga conto di questi parametri.

Introduciamo una partizione  $\mathcal{T}_h$  del dominio  $\Omega$  negli elementi  $K_j$ , e consideriamo come spazi  $V_h$  gli spazi  $X_h^r$ :

$$X_h^r = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_r, \forall K_j \in \mathcal{T}_h\} \quad r = 1, 2, \dots$$

Sia  $\Pi_h^r : C^0(\bar{\Omega}) \mapsto X_h^r$  l'operatore che associa ad ogni funzione continua  $v$  il suo polinomio interpolante  $\Pi_h^r v$  in  $X_h^r$ .

Si ha la seguente stima dell'**errore di interpolazione**:

### Teorema: Errore d'Interpolazione

Sia  $v \in H^{r+1}(I)$ , per  $r \geq 1$ . Si ha che

$$|v - \Pi_h^r v|_{H^k(I)} \leq C h^{r+1-k} |v|_{H^{r+1}(I)}, \quad \text{per } k = 0, 1.$$

Le costanti  $C$  sono indipendenti da  $v$  ed  $h$  e l'operatore  $|f|_{H^k}$  indica la seminorma ovvero

$$|f|_{H^k} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 d\Omega}$$

**Dimostrazione:** (nel caso  $r=1$ )

Vedi Cap 4.3.4 di *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali* di Quarteroni, o pdf allegato.

# Stime d'errore

## Caso monodimensionale

### Teorema: **Stima a priori**

Sia  $u \in V$ , la soluzione esatta del problema nella forma debole, ed  $u_h$  la sua soluzione approssimata con il metodo degli elementi finiti di grado  $r$ , ovvero la soluzione in  $X_h^r$ . Sia poi  $u \in H^{p+1}(I)$  per  $p$  tale che  $r \leq p$ . (Quindi, affinché la stima valga  **$u$  deve stare almeno in  $H^{r+1}$**  ). Allora vale la seguente stima a priori dell'errore

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} C h^r |u|_{H^{r+1}(I)}$$

dove  $C$  è una costante indipendente da  $u$  e  $h$ .

**Dimostrazione:** Sfruttando il lemma di Cea (con  $w_h = \Pi_h^r u$ ) e la disuguaglianza del teorema precedente si ha

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^r u\|_V \leq \frac{M}{\alpha} C |u|_{H^{r+1}} h^{r+1-k} \leq \frac{M}{\alpha} C |u|_{H^{r+1}} h^r \quad \blacksquare$$

# Stime d'errore ... caso monodimensionale

Quindi per **umentare l'accuratezza del metodo** abbiamo due strategie:

- **Diminuire  $h$** , ossia raffinare la griglia (vedremo dopo alcune procedure efficienti per farlo)
- **Aumentare  $r$** , cioè utilizzare elementi finiti di grado più elevato. Purtroppo però questa tecnica ha senso solo se la soluzione  $u$  è sufficientemente regolare. Infatti dal teorema si ricava che se  $u \in H^{p+1}$  il massimo valore che ha senso prendere è  $r = p$ . Valori maggiori non assicurerebbero un miglioramento dell'approssimazione aumentando il costo computazionale

$r$	$u \in H^1(I)$	$u \in H^2(I)$	$u \in H^3(I)$	$u \in H^4(I)$	$u \in H^5(I)$
1	converge	$h^1$	$h^1$	$h^1$	$h^1$
2	converge	$h^1$	$h^2$	$h^2$	$h^2$
3	converge	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$h^3$
4	converge	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$h^4$



Anche nel caso multidimensionale per avere una stima dell'errore prima è necessario stimare  $v - \Pi_K^r v$  per il quale otteniamo

- Una **stima locale**, che tiene conto di  $h_K$ , il lato più lungo del triangolo  $K$ , e di  $\rho_K$ , la sfericità, ovvero il diametro della circonferenza inscritta nel triangolo  $K$ :

$$|v - \Pi_K^r v|_{H^m(K)} \leq C \frac{h_K^{r+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{r+1}(K)} \quad \forall v \in H^{r+1}(K)$$

- Una **stima globale**

$$|v - \Pi_h^r v|_{H^m(\Omega)} \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2(r+1-m)} |v|_{H^{r+1}(K)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^{r+1}(\Omega)$$

### Teorema: Stima a priori (Norma $H^1$ )

Sia  $u \in V$  la soluzione esatta del problema debole e  $u_h$  la soluzione approssimata con il metodo degli elementi finiti di grado  $r$ . Se  $u \in H^{r+1}(\Omega)$ , allora valgono le seguenti stime a priori dell'errore:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2r} |u|_{H^{r+1}(K)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} C h^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

essendo  $C$  una costante indipendente da  $h$  e da  $u$ .

### Teorema: Stima a priori (Norma $L^2$ )

Nelle ipotesi del teorema precedente, se  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^{p+1}(\Omega)$  per un  $p > 0$ . Allora vale

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{s+1} |u|_{H^{s+1}(\Omega)}, \quad s = \min\{r, p\}$$

Vediamo l'andamento dell'errore in un **esempio**.

Consideriamo il problema  $-\Delta u + u = f$  in  $\Omega = (0, 1)^2$  con  $u = g$  su  $\partial\Omega$ , dove  $f$  e  $g$  siano scelte in modo che la soluzione esatta sia

$$u(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

# Stime d'errore

## Caso Multidimensionale

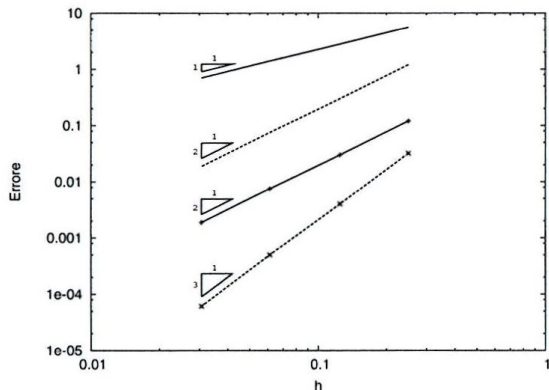


Figura : Andamento rispetto ad  $h$  dell'errore in norma  $H^1$  (linee senza crocette) e in norma  $L^2$  (linee con le crocette). Elementi finiti lineari (linee continue) e quadratici (linee tratteggiate)

# Adattività della Griglia

Per **ridurre l'errore** di approssimazione che si commette usando il metodo degli elementi finiti, possiamo sfruttare le stime d'errore appena mostrate, e costruire una **griglia più efficiente**

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} C h^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2r} |u|_{H^{r+1}(K)}^2 \right)^{1/2}$$

- Se facessimo riferimento alla **prima**, poiché  $h$  indica la lunghezza massima di un lato della triangolazione, per ridurre l'errore dovremmo infittire ovunque la griglia (ma ricordiamo che  $K_2(A) = Ch^{-2}$  e quindi in generale non sarebbe una buona scelta).
- Conviene allora usare la **seconda**, in quanto essa tiene conto del **comportamento locale della soluzione** attraverso la seminorma di  $u$  e il parametro locale  $h_K$ .

# Adattività della Griglia

Per avere una griglia efficiente è necessario **equidistribuire l'errore** su ogni elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ . In particolare si vorrebbe ottenere

$$h_K^r |u|_{H^{r+1}(K)} \simeq \eta \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Quindi dove  $|u|_{H^{r+1}(K)}$  è maggiore sarà necessario infittire la griglia in modo da diminuire  $h_K$ .

**Il problema è che la soluzione  $u$  non è nota**

Quindi dobbiamo ottenere una **stima** della quantità  $|u|_{H^{r+1}(K)}$ . Si possono seguire due strade diverse:

- Adattività a **priori**
- Adattività a **posteriori**

(I due metodi possono comunque essere utilizzati anche insieme)

# Adattività della Griglia

## Adattività a priori

L' **adattività a priori** si basa sulla **ricostruzione delle derivate di  $u$**  su ogni elemento della triangolazione a partire da una soluzione  $u_{h^*}$  calcolata usando una griglia  $\mathcal{T}_{h^*}$ , di passo  $h^*$  abbastanza grande, in modo che il calcolo sia computazionalmente economico.

Concentriamoci sul caso degli elementi finiti lineari.

Per prima cosa si costruisce un' **approssimazione** lineare a tratti  $g_{h^*}$  del gradiente  $\nabla u_{h^*}$  definita come:

$$[g_{h^*}(x)]^j = \sum_i \pi_i^j(x_i) \varphi_i(x), \quad j = 1, 2$$

dove i  $\pi_i^j = a_i^j \cdot x + b_i^j$  sono i piani che minimizzano

$$\int_{K_{N_i}} \left| \pi_i^j(x) - \frac{\partial u_{h^*}}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \quad j = 1, 2$$

# Adattività della Griglia

## Adattività a priori

Una volta costruito il gradiente, otteniamo la seguente **approssimazione**, costante a tratti, della matrice **Hessiana** associata ad  $u$  (che risulta simmetrica)

$$D_h^2|_{K^*} = \frac{1}{2} (\nabla g_{h^*} + (\nabla g_{h^*})^T)|_{K^*}.$$

Ora quindi possiamo stimare la  $|u|_{H^2(K)}$  con la quantità

$$\sum_{i,j=1}^2 \| [D_h^2]_{ij} \|_{L^2(K)}^2$$

e quindi per avere un errore inferiore a  $\varepsilon$  nel calcolo di  $u_h$  dobbiamo costruire una **nuova triangolazione**  $\mathcal{T}_h^{\text{new}}$  di passo  $h$  tale che

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{new}}} h_K^2 \sum_{i,j=1}^2 \| [D_h^2]_{ij} \|_{L^2(K)}^2 \leq \left( \frac{\varepsilon}{C} \right)^2$$



# Adattività della Griglia

## Adattività a priori

Se vogliamo anche **equidistribuire l'errore** su ogni elemento della triangolazione possiamo **suddividere** opportunamente tutti i **triangoli**  $K^*$  di  $\mathcal{T}_{h^*}$  per cui si abbia

$$\eta_{K^*}^2 = h_{K^*}^2 \sum_{i,j=1}^2 \| [D_h^2]_{ij} \|_{L^2(K^*)}^2 > \frac{1}{N^*} \left( \frac{\varepsilon}{C} \right)^2$$

Questa procedura è detta di **raffinamento**. (Sarebbe anche possibile **deraffinare** la griglia quando la disuguaglianza è verificata con  $\ll$ , ma questa procedura è di difficile implementazione).

Per quanto riguarda la **costante C**: può essere stimata usando delle funzioni note, per cui quindi è possibile calcolare l'errore esattamente.

# Adattività a priori . . . esempio

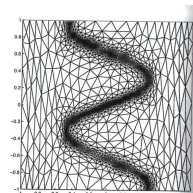
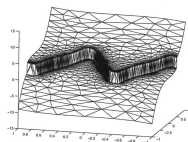
Per **verificare che la procedura descritta infittisce effettivamente la griglia** dove la soluzione è meno regolare possiamo considerare la funzione

$$u(x_1, x_2) = 10x_1^3 + x_2^3 + \tan^{-1}(10^{-4}/(\sin(5x_2) - 2x_1)) \quad \text{su } \Omega = (-1, 1)^2$$

che è caratterizzata da una brusca variazione di valori in corrispondenza della curva

$$x_1 = 0.5\sin(x_2).$$

- Partiamo da una griglia costituita da 50 triangoli, ci costruiamo l'approssimazione dell'Hessiana e sfruttandola raffiniamo la griglia dove  $\eta$  ha valori troppo elevati.
- Dopo 3 iterazioni otteniamo il risultato nella figura in basso con 3843 triangoli.



# Adattività della Griglia

## Adattività a posteriori

Il problema della procedura precedente è che la ricostruzione delle derivate di  $u$  a partire da quelle di  $u_{h^*}$  è spesso soggetta ad errori non quantificabili.

Una procedura diversa consiste nell'adottare **stime a posteriori dell'errore** basate su **quantità calcolabili** come il **residuo**  $\rho_K$  della soluzione approssimata, che fornisce una misura di quanto la soluzione discreta soddisfi il problema differenziale su ogni elemento della triangolazione data.

Ci riferiamo al problema  $-\Delta u = f$ , e indichiamo il **residuo** con

$$\rho_K(u_h) = h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} h_K^{\frac{1}{2}} \left\| \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(\partial K)}$$

Le parentesi quadre indicano il salto della derivata normale cioè  $(\nabla u_h|_{K_1} - \nabla u_h|_{K_2}) \cdot n_1$  lungo il lato  $e$  che separa  $K_1$  e  $K_2$  e 0 su un lato di bordo

# Adattività della Griglia

## Adattività a posteriori

Dopo un po' di passaggi otteniamo la seguente **stima dell'errore** di approssimazione:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\rho_K(u_h)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

che quindi **dipende principalmente da  $\rho_K$ , una quantità calcolabile**, e dalle costante  $C$ , che però risulta sufficientemente trascurabile.

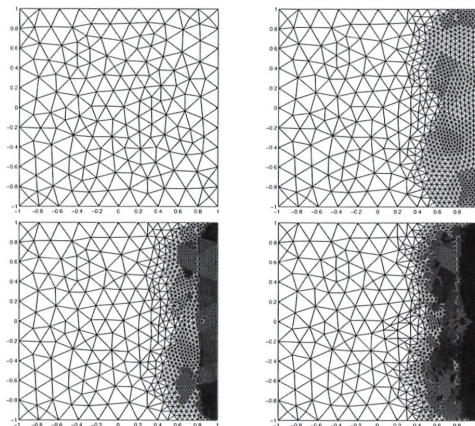
Imponendo che  $\frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{N} \|u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq [\rho_K(u_h)]^2 \leq \frac{9}{4} \frac{\varepsilon^2}{N} \|u_h\|_{H^1(\Omega)}^2$  (dove  $N$  è il numero di elementi totali della griglia  $\mathcal{T}_h$ ) e applicando una procedura iterativa che raffina più volte la griglia si riesce ad ottenere che

$$\frac{1}{2} \varepsilon \leq \frac{\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}}{\|u_h\|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{3}{2} \varepsilon$$

# Adattività a posteriori . . . esempi

Consideriamo il problema  $-\Delta u = f$  su  $\Omega = (-1, 1)^2$ , assegnando condizioni di Dirichlet omogenee e scegliendo  $f$  in modo che la soluzione esatta sia  $u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\exp(10x)$ .

Partiamo da una griglia uniforme costituita da 324 elementi, e avviamo la procedura con  $\varepsilon = 0.02$ . Otteniamo la precisione richiesta dopo 7 iterazioni, avendo costruito una griglia con 38850 triangoli.



Consideriamo il problema  $-\Delta u = 0$  su

$\Omega = \{x = r(\cos\theta, \sin\theta)^T, r \in (0, 1), \theta \in (0, \frac{3}{4}\pi)\}$ , e assegniamo  $u$  al bordo in modo che la soluzione esatta sia  $u(r, \theta) = r^{4/3} \sin(\frac{4}{3}\theta)$ .

- Tale funzione è poco regolare in un intorno dell'origine, infatti calcolando la soluzione con il metodo degli elementi finiti sulla griglia di sinistra (138 triangoli) si nota dalle curve di livello distorte (riportate sotto) che la soluzione in quella regione risulta poco accurata.
- Avviamo allora una **procedura iterativa di raffinamento basata sulle stime a posteriori** e dopo 20 iterazioni ottiene una precisione  $\varepsilon = 0.01$  avendo costruito una griglia con **859** triangoli.
- Per ottenere la stessa precisione con una **griglia uniforme** sarebbero serviti **2208** triangoli!

# Adattività a posteriori . . . esempi

