Condizionamento

- In astratto per calcolare qualcosa prendiamo dei parametri di **input** e ritorniamo il valore calcolato basato su questi parametri, cioè l'**output**.

- Per esempio quando si vorrebbe trovare gli zeri dell'equazione quadratica $x^2 - 3x + 2 = 0$, i tre coefficient $[1, -3, 2]$ sono i parametri dell'**input** mentre l'**output** è la risposta $x = \{1, 2\}$.

- Dobbiamo sempre essere consapevoli che **(piccoli) errori sono inevitabili**!

- Per certi problemi è possibile che un piccolo errore nell'**input** risulta in un errore molto più grande nell'**output**. Quando questo succede si dice che il problema è **mal** condizionato.

- Quando invece, un piccolo errore nell'**input** risulta in un errore solo **leggermente** più grande nell'**output**, si dice che il problema è **ben** condizionato.

- I termini **qualitativi** *mal* e *ben* possono essere precisati tramite un'analisi più quantitativa.

- Per esempio, supponiamo che vogliamo risolvere l'equazione $f(x) = y$ dove la funzione $f(x)$ è data e il valore di y è noto. Se la risposta esatta è $x = a$ vuol dire che $f(a) = y$ e allora possiamo riscrivere la nostra equazione come $f(x) = f(a)$, con risposta esatta $x = a$ che stiamo cercando. Purtroppo, a priori non avremo mai la risposta esatta (altrimenti non avrebbe senso cercarla!), e allora facendo dei calcoli arriviamo ad una risposta calcolata, che speriamo sia vicino alla risposta esatta. Diciamo che questa risposta calcolata è $\hat{a}$ che consideriamo come un **candidato** per la risposta esatta. Per controllare se $\hat{a}$ è sufficiente vicino alla risposta esatta a, calcoliamo il **residuo**

$$r := f(\hat{a}) - f(a),$$

cioè il valore che **dovrebbe essere** zero. La domanda è "dal residuo possiamo ricavare dell'informazione sull'errore $\hat{a} - a$"? Infatti si puo!

Dal Teorema della Media abbiamo che

$$\frac{f(\hat{a}) - f(a)}{\hat{a} - a} = f'(c)$$

per c un punto intermedio a a e $\hat{a}$. E da questo risulta che

$$(\hat{a} - a) = \frac{1}{f'(c)}(f(\hat{a}) - f(a))$$

cioè

$$\underbrace{(\hat{a}-a)}_{\text{l'errore}} = \underbrace{\frac{1}{f'(c)}}_{\text{fattore di espansione}} \underbrace{(f(\hat{a})-f(a))}_{\text{il residuo}}.$$

Se il **fattore di espansione del residuo** $1/f'(c)$ è grande vuol dire che un piccolo residuo può risultare in un errore molto più grande e il problema sarà mal condizionato.

- Esempio: Supponiamo che $f(x) = x^2$ e $y = 0$, cioè vogliamo risolvere $x^2 = 0$ e ovviamente $a = 0$ è la rsiposta esatta. Proponiamo però un candidato $\hat{a} = 10^{-8}$. Il residuo è quindi

$$r = f(\hat{a}) - f(0) = \hat{a}^2 = (10^{-8})^2 = 10^{-16}$$

che è abbastanza piccolo. Però il fattore di espansione del residuo è $1/f'(c) = 1/(2c)$ che stiamo con

$$\approx \frac{1}{f'(\hat{a})} = \frac{1}{2\hat{a}} = \frac{1}{2\,10^{-8}} = \frac{10^{+8}}{2}$$

che essendo molto grande significa che nonostante il fatto che il residuo sia piccolo l'errore potrebbe (e infatti è) molto più grande!

- Un altro modo di analizzare è di considerare la funzione che dato l'**input** restituisce la risposta esatta cioè l'**output**. Per esempio, per un'equazione quadratica generale $q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ l'**input** è il vettore dei tre coefficienti $[a_2, a_1, a_0]$ e l'**output** è la formula quadratica

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

che possiamo scrivere in modo astratto come $x = F(a_2, a_1, a_0)$. Per semplicità consideriamo il caso di solo un parametro di **input**, a e allora x, la risposta esatta è data da $x = F(a)$. Vogliamo capire cosa succede all'**output** x quando un (piccolo) errore è introdotto nell'**input**, cioè quando a è sostituito da $a + h$, diciamo (e allora h è l'errore nell'**input**. Abbiamo quindi

$$\underbrace{F(a+h)-F(a)}_{\text{l'errore nell'}\textbf{output}} = \underbrace{F'(c)}_{\text{il fattore di espansione}} \times \underbrace{((a+h)-a)}_{\text{l'errore nell'}\textbf{input}},$$

per un punto intermedio c, usando di nuovo il Teorema della media.

- Se il fattore di espansione dell'errore è grande significa che un errore piccolo nell'**input** può essere amplificato in un errore molto più grande nell'**output**!