Filosofia della Scienza - Soluzione Compito 1

Gianluigi Bellin

November 10, 2009

1 Formalizzazione, calcolo dei predicati del primo ordine

Il calcolo dei predicati del primo ordine ammette linguaggi formali $\mathcal{L}$ della forma (**Costanti**, **Funzioni**, **Predicati**) dove

Costanti = $\{c_1, \ldots, c_k\}$ sono *nomi* di oggetti;

Funzioni = $\{f_1^{j_1}, \ldots f_m^{j_m}\}$ sono espressioni $f^j(x_1, \ldots, x_j)$ che associano ad ogni lista $(t_1, \ldots, t_j)$ di *nomi di oggetti* (gli *argomenti*) un *nome di oggetto* $f^j(t_1, \ldots, t_j)$ (il *valore* della funzione per quegli argomenti);

Predicati) = $\{P_1^{j_1}, \ldots P_n^{j_n}\}$ sono espressioni $P^j(x_1, \ldots, x_j)$ che stanno per proprietà di oggetti; possono anche essere considerate come funzioni che associano ad ogni lista $(t_1, \ldots, t_j)$ di nomi di oggetti un valore di verità.

Note. (i) La definizione astratta sembra completamente astrusa. In realtà, l'esempio considerato in Esercizio 1 mostra quanto l'idea sia semplice: qui abbiamo **due costanti** (*Romeo, Giulietta*), **due funzioni** (*padre di* ..., *madre di* ...) ed **un predicato** (... *ama* ...).

(ii) Possiamo formare l'espressione "*padre di Romeo*" sostituendo il nome *Romeo* per la *variabile* x nell'espressione *padre di* (x); questo significa che *padre di* ... è una espressione *insatura* e noi abbiamo semplicemente "riempito il buco" nell'espressione con un nome; l'espressione *satura* che otteniamo in questo modo può essere usata come *nome* di un certo oggetto (nella tragedia di Shakespeare, si tratta di un individuo che ha un nome proprio *Lord Montague* (il *Signor Montecchi*) e che può anche essere identificato come *il padre di Romeo*).

(ii) Nello stesso modo il predicato "*x ama y*" è una espressione insatura, perché contiene due variabili libere ("buchi"). Quando sostituiamo dei *nomi* al posto delle variabili libere x ed y otteniamo delle espressioni sature, per esempio, *proposizioni* come *Romeo ama Giulietta* ed *il padre di Romeo ama il padre di Giulietta*. Le proposizioni sono espressioni che possono essere usate per descrivere stati di cose; infatti esse possono essere vere o false a seconda della situazione in cui le usiamo.

1.0.1 Semantica

A che cosa si riferiscano i nomi, le funzioni ed i predicati del linguaggio formale $\mathcal{L}$? A questo punto, la domanda non ha ancora una risposta: tutto dipende da come interpretiamo i nomi e le funzioni e dalle situazioni di cui vogliamo parlare. In altre parole, quando definiamo $\mathcal{L}$ stiamo solo definendo la *grammatica* del nostro linguaggio, non la *semantica*; spesso succede che quando definiamo un linguaggio abbiamo in mente una *interpretazione intesa*, ma poi scopriamo che è possibile dare una semantica molto diversa da quella intesa. Per esempio, la tragedia di Shakespeare si riferisce ad un mondo immaginario, dove esistono alcune persone chiamate Romeo e Giulietta, i loro genitori e dove alcuni si amano ed altri si odiano. Ma potremmo anche interpretare la storia come riferentesi ai docenti che abitano Ca' Vignal II, a condizione di interpretare *padre di* ... e *madre di* ... in modo diverso da quello inteso (cioè *metaforico*). Oppure potremmo anche interpretarla come una descrizione di relazioni tra numeri naturali, dove *Romeo* denota il numero 5 e *Giulietta* il numero 4 e "*x ama y*" come $x - 3 \leq y$.

Volendo scrivere tutto ciò in modo molto generale, come amano fare i matematici, si può descrivere un interpretazione così. Ci serve un *modello* $\mathcal{I}$ della forma $(D, \mathbf{Costanti}_{\mathcal{I}}, \mathbf{Funzioni}_{\mathcal{I}}, \mathbf{Predicati}_{\mathcal{I}})$ dove

- D è l'universo del discorso;
- $\mathbf{Costanti}_{\mathcal{I}} = \{(c_1)_{\mathcal{I}}, \ldots, (c_k)_{\mathcal{I}}\}$ sono *elementi* del oggetti;
- **Funzioni** $= \{(f_1)_{\mathcal{I}} : D^{j_1} \to D, \ldots (f_m)_{\mathcal{I}}\} : D^{j_m} \to D$ sono funzioni definite su D;
- **Predicati**$) = \{(P_1)_{\mathcal{I}}, \ldots (P_n)_{\mathcal{I}}\}$ sono proprietà e relazioni di elementi dell'universo del dicorso; queste si possono considerate come funzioni $(P_i)_{\mathcal{I}} : D^{j_i} \to \{V, F\}$.

Non fa parte di questo compito studiare le interpretazioni del linguaggio $\mathcal{L}$: qui ci fermiamo al compito di *formalizzare* espressioni del linguaggio naturale in espressioni di $\mathcal{L}$.

1.1 Esercizio 1

Considera i seguenti enunciati:

1. *Giulietta ama Romeo, suo padre e sua madre.*
2. *Romeo ama Giulietta ed anche tutti coloro che sono amati da Giulietta.*
3. *Il padre di Romeo ama Romeo, ma non ama il padre di Giulietta.*
4. *Il padre di Romeo ama tutti coloro che sono amati da Romeo.*

1.1.1 Soluzione di 1(i)

> **Esercizio 1** (i) Indica il *lessico* degli enunciati 1-4, cioè, i *nomi*, le *funzioni* ed i *predicati* che compaiono in essi. Definisci il linguaggio formale $\mathcal{L}$ con **costanti**, **simboli di funzione** e **simboli di predicato** corrispondenti a questo lessico.
>
> *1 punto*

Lessico.

- **Nomi:** *Romeo, Giulietta*;
- **Funzioni:** *padre di* ..., *madre di* ...;
- **Predicato:** ... *ama* ....

Linguaggio formale. $\mathcal{L}$:

> **Nomi:**$\{R, J\}$;
>
> **Funzioni:** $\{f^1(x), m^1(x)\}$;
>
> **Predicato:** $\{L^2(x, y)\}$.

Nota: Fin qui il linguaggio formale sembra solo una abbreviazione di quello informale. Le cose si complicano nel seguito.

1.1.2 Soluzione di 1(ii)

Esercizio 1 (ii) Formalizza 1-4.

1 punto

1. $L(J, R) \wedge (L(J, f(J)) \wedge L(J, m(J))$.
2. $L(R, J) \wedge (\forall x.L(J, x) \rightarrow L(R, x))$.
3. $L(f(R), R) \wedge \neg L(f(R), f(J))$.
4. $\forall x.L(R, x) \rightarrow L(f(R), x)$.

Nota: L'espressione *Giulietta ama Romeo, suo padre e sua madre* è ambigua: ci sono due nomi, Giulietta e Romeo, nella prima frase e le due occorrenze dell'aggettivo possessivo "*suo*" nella seconda e nella terza frase possono riferirsi a entrambe. [1]

1.1.3 Soluzione di 1(iii)

Esercizio 1 (iii) Indica gli *enunciati atomici chiusi* contenuti in 1-4, cioè, gli enunciati che *non* contengono quantificatori o connettivi (neppure negazioni) (*atomici*) e che non contengono variabili libere (*chiusi*).

Suggerimento: ci sono tre atomi chiusi in (1), uno in (2), due in 3 e nessuno in 4.

1 punto

[1] Nella nostra soluzione abbiamo tradotto "*suo padre*", "*sua madre*" come "*padre di Giulietta*", "*madre di Giulietta*", ma in realtà quattro soluzioni sono possibili, in principio:

1-1 $L(J, R) \wedge (L(J, f(J)) \wedge L(J, m(J))$;

1-2 $L(J, R) \wedge (L(J, f(R)) \wedge L(J, m(R))$.

1-3 $L(J, R) \wedge (L(J, f(J)) \wedge L(J, m(R))$.

1-4 $L(J, R) \wedge (L(J, f(R)) \wedge L(J, m(J))$.

Le traduzioni [1-3] ed [1-4] sono meno plausibili e, ordinariamente, sembrano escluse nell'uso linguistico. Ma [1-2] può essere altrettanto plausibile che [1-1], dato il contesto più generale della narrazione. Vi sono regole linguistiche che trattano questi problemi di traduzione e di interpretazione, e in linguistica computazionale si cercano soluzioni che siano *fattibili*, cioè che possano essere decise in tempo lineare: questo deve essere possibile perché la comprensione di questi enunciati è pressoché simultanea all'ascolto, e dunque la mente umana compie queste scelte in tempo lineare.

1. $L(J,R), (L(J,f(J)), L(J,m(J))$ formule chiuse ed atomiche in 1.

2. $L(R,J)$ chiusa ed atomica in 2.

3. $L(f(R),R)$, $L(f(R),f(J))$ chiuse ed atomiche in 3. ($\neg L(f(R),f(J))$ è chiusa ma non atomica, perché contiene il connettivo $\neg$).

4. $\forall x.L(R,x) \to L(f(R),x)$ è formula chiusa, ma i suoi atomi $L(R,x)$ ed $L(f(R),x)$ sono aperti.

1.1.4 Soluzione di 1(iv)

> (iv) Ritieni che gli enunciati (1)-(4) comportino una contraddizione? Se si, indica un enunciato atomico chiuso tale che sia esso che la sua negazione seguano da (1)-(4).
>
> *1 punto*

Se abbiamo tradotto Giulietta ama Romeo, suo padre e sua madre *come Giulietta ama Romeo, il padre di Giulietta e la madre di Giulietta*, allora abbiamo una contraddizione come segue.

1. *Giulietta ama Romeo, il padre di Giulietta e la madre di Giulietta.*
2. *Romeo ama Giulietta ed anche tutti coloro che sono amati da Giulietta.*
3. *Il padre di Romeo ama Romeo, ma non ama il padre di Giulietta.*
4. *Il padre di Romeo ama tutti coloro che sono amati da Romeo.*
5. *Giulietta ama il padre di Giulietta*,
   secondo enunciato di 1;
6. *Romeo ama il padre di Giulietta*,
   "esempio" del secondo enunciato di 2;
7. *Il padre di Romeo ama il padre di Giulietta*,
   "esempio" di 4;
8. *Il padre di Romeo non ama il padre di Giulietta*,
   secondo enunciato di 3.

Gli enunciati 7 ed 8 costituiscono una contraddizione; sia l'enunciato atomico chiuso *Il padre di Romeo ama il padre di Giulietta* sia la sua negazione sono derivati da 1 - 4.

1.1.5 Formalizzazione (non richiesta)

Possiamo formalizzare la derivazione 1-8 in *Deduzione Naturale* come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{L(R,J)\land(\forall x.L(J,x)\to L(R,x))}{\forall x.L(J,x)\to L(R,x)}\,\land_2\text{-E}}{L(J,f(J))\to L(R,f(J))}\,\forall\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{L(J,R)\land(L(J,f(J))\land L(J,m(J)))}{L(J,f(J))\land L(J,m(J))}\,\land_2\text{-E}}{L(J,f(J))}\,\land_1\text{-E}}{L(R,f(J))}\,\to\text{-E}$$

(prova 1)

$$\dfrac{\dfrac{L(f(R),R)\land\neg L(f(R),f(J))}{\neg L(f(R),f(J))}\,\land_2\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x.L(R,x)\to L(f(R),x)}{L(R,f(J))\to L(f(R),f(J))}\,\forall\text{-E} \qquad \begin{matrix}\text{(prova 1)}\\ L(R,f(J))\end{matrix}}{L(f(R),f(J))}\,\to\text{-E}}{\neg L(f(R),f(J))\land L(f(R),f(J))}\,\land\text{-R}$$

contraddizione

2 Soluzione Esercizio 2.

Formalizza il seguente detto di Abraham Lincoln:

> *"You can fool all the people some of the time, and some of the people all the time, but you cannot fool all the people all the time."*
>
> "Qualche volta si può imbrogliare tutto il mondo, e qualcuno si fa imbrogliare sempre, ma non si possono imbrogliare tutti sempre."
>
> *Hint:* In questo caso *"you"* significa 'tutti', dunque serve un predicato $F(x,y,t)$ con x legato da un quantificatore universale; inoltre x ed y variano nel dominio delle persone e t in quello del tempo.

2 punti

Converrebbe per semplicità semplificare il problema, volgendo la frase al passivo:

> *Qualcuno si fa imbrogliare sempre e qualche volta tutti si fanno imbrogliare, ma non tutti si fanno sempre imbrogliare.*

Possiamo qui usare un predicato binario $F(y,t)$, dove y varia su persone e t su periodi di tempo, dunque abbiamo anche due predicati binari $P(x)$ e $T(x)$. La formalizzzione richiesta diventa:

$$\begin{gathered}\big[\exists y.P(y)\land\forall t.T(t)\to F(y,t)\big]\land\\ \big[\exists t.T(t)\land\forall y.P(y)\to F(y,t)\big]\land\\ \big[\neg\forall y.P(y)\to\forall t.T(t)\to F(y,t)\big]\end{gathered}$$

È importante notare che non corrisponde al significato intuitivo invertire l'ordine dei quantificatori $\exists t$ e $\forall y$ nel secondo congiunto:

$$\forall y.P(y) \rightarrow \exists t.T(t) \wedge F(y,t)$$

poiché questo significa: *tutti si fanno imbrogliare qualche volta.*

Se poi si segue il suggerimento e si mantiene il pronome *"tu"* come espressione di genericità, allora la migliore soluzione è la seguente:

$$\begin{array}{lll} \forall x.P(x) & \rightarrow & \big[\exists y.P(y) \wedge \forall t.T(t) \rightarrow F(x,y,t)\big] \wedge \\ & & \big[\exists t.T(t) \wedge \forall y.P(y) \rightarrow F(x,y,t)\big] \wedge \\ & & \big[\neg \forall y.P(y) \rightarrow \forall t.T(t) \rightarrow F(x,y,t)\big] \end{array}$$

3 Soluzione Esercizio 3.

Formalizza i seguenti enunciati nella logica in proposizionale. Indicare sempre la chiave, per esempio, J = *'John viene'*.

(i) John è non solo stupido ma anche cattivo.

1 punto

(ii) Se resti con me a condizione che smetta di bere, smetto di bere.

1 punto

(iii) Charles viene se Elsa viene e viceversa.

1 punto

(iv) John va a scuola e se piove così fa Peter.

1 punto

(i) S_J = John è stupido
C_J = John è cattivo

$$S_J \wedge C_J$$

(ii) R_t = Tu resti con me
S_i = Io smetto di bere

$$(S_i \rightarrow R_t) \rightarrow S_i$$

(iii) C = Charles viene
E = Elsa viene

$$(E \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow E)$$

(iv) J = John va a scuola
P = Peter va a scuola
R = Piove

$$J \wedge (R \rightarrow P)$$

Nota. L'unico caso problematico è il (ii). Infatti la formalizzazione indicata non coglie un aspetto importante dell'enunciato, il suo significato *prammatico*: l'enunciato (iii) esprime una promessa che implica anche un sottile ricatto:

> *Smetterò di bere se resti con me, ma se non accetti di restare, sarai responsabile del mio continuare a bere.*

Il "ricatto" sembra esulare dalla formalizzazione, ma la promessa dovrebbe essere indicata, per esempio con un operatore "$\mathcal{P}\ldots$" = *prometto che* .... Tuttavia *la trattazione di questi aspetti esula dai limiti di questo compito.*